

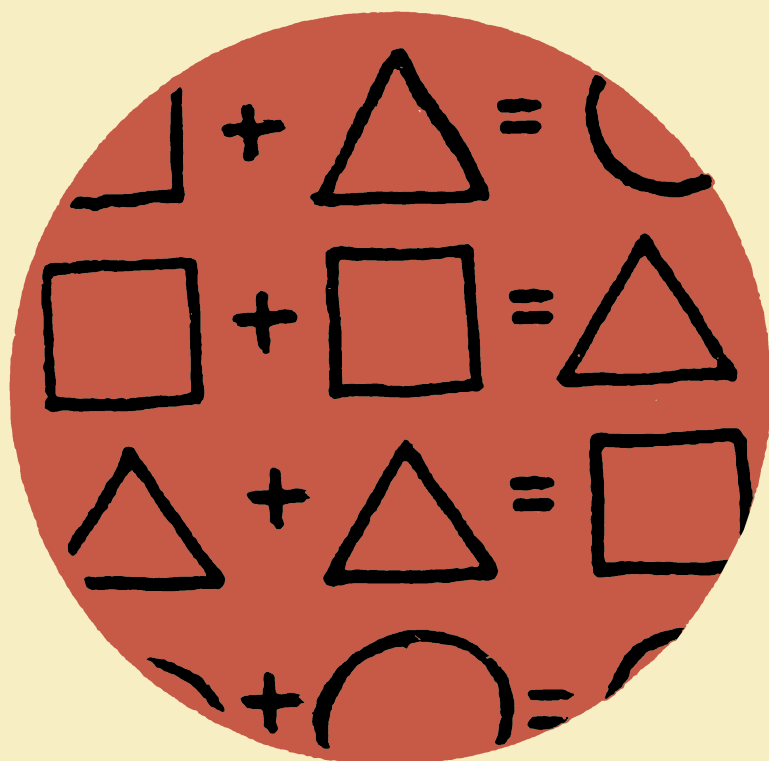
Математика

Библиотечка
физико-математической школы

Е.Б.Дынкин
С.А.Молчанов
А.Л.Розенталь

Математи- ческие соревнования

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА



Математика

Библиотечка
физико-математической школы

Выпуск 3*

Е. Б. Дынкин,
С. А. Молчанов,
А. Л. Розенталь

Математические соревнования

Арифметика и алгебра

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва 1970

512
Д 89
УДК 512 2/512.3

Математика

Библиотечка
физико-математической школы

Редактор серии
И. М. Гельфанд

Серия дополнительная

Содержание

| | |
|---------------------------------|----|
| Предисловие | 4 |
| Задачи | 5 |
| Решения | 21 |
| Дополнительные задачи | 91 |

Расположение задач по циклам

| | |
|---|--------------|
| | Номера задач |
| Логические задачи | 1—20 |
| Комбинаторика и расположения | 21—37 |
| Принцип Дирихле | 38—47 |
| Делимость | 48—70 |
| Неравенства | 71—84 |
| Уравнения, последовательности | 85—103 |
| Задачи, связанные с теорией групп | 104—107 |
| Иррациональные числа | 108—111 |

Предисловие

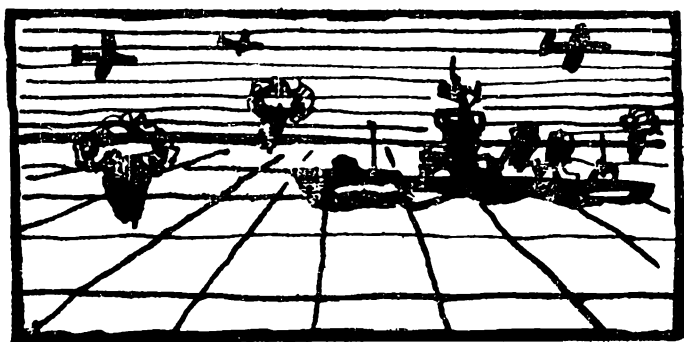
Эта книжка предназначена для школьников, любящих решать трудные задачи. Так же как и выпущенный ранее сборник «Математические задачи» *), она написана по материалам Вечерней математической школы при механико-математическом факультете МГУ. В нее включены алгебраические и логические задачи, дававшиеся на конкурсах ВМШ в 1964—1966 гг.

Подбором задач руководили в 1964/65 учебном году Н. Васильев, в 1965/66 учебном году — Л. Гончарова, А. Толпыго, В. Фишман, И. Яглом, в 1966/67 учебном году — Б. Григорьев, С. Гусейн-заде и И. Евстигнеев. К задачам, дававшимся в ВМШ, авторы добавили около 30 новых задач. Задачи сгруппированы в тематические циклы (перечень циклов приведен на стр. 3). Внутри цикла авторы старались расположить задачи по возрастанию сложности. Задачи без решений помещены в специальном разделе «Дополнительные задачи».

При подборе задач использовались самые разнообразные источники. Часть задач заимствована из «Сборника задач московских математических олимпиад», «Просвещение», 1965 (задачи 53, 56, 58, 64, 69, 74, 76, 82), из книги M. Gardner, *Mathematical puzzles and diversions*, Penguin Books, 1965 (задачи 4, 5, 6, 26 и 33) и из других источников. При этом многие формулировки были переработаны, все решения написаны заново. Ряд задач, по-видимому, еще нигде не публиковался (например, 13, 16, 50, 57, 70, 96, 107 и др.).

Знаний, имеющихся у восьмиклассников, достаточно для решения большинства задач. Задачи, требующие большей подготовки, отмечены звездочкой. Наиболее трудные задачи выделены двумя звездочками.

) Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго, Математические задачи, Библиотека физико-математической школы, серия дополнительная, выпуск 1, 1-е изд., Физматгиз, 1965; 2-е изд., «Наука», 1966.



ЗАДАЧИ

1. Три разбойника хотят поделить добычу. Каждый уверен, что он бы поделил добычу на равные части, но остальные ему не доверяют. Если бы разбойников было двое, то выйти из положения было бы легко: один разделил бы добычу на две части, а другой взял бы ту часть, которая ему кажется большей. Укажите, как должны действовать три разбойника, чтобы каждый из них был уверен, что его доля составляет не менее одной трети от всей добычи. (Добыча настолько разнородна, что объективного способа сравнения отдельных частей не существует.)

2. Решите предыдущую задачу в случае, когда разбойников n .

3**. Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари из двух враждующих кланов, причем оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Доказать, что общее число рыцарей делится на 4.

4. Логик попал на остров, населенный двумя племенами. Представители одного племени всегда говорят правду, представители другого — всегда лгут. Путешественник подошел к развилке дороги, и ему пришлось спросить у оказавшегося поблизости местного жителя, какая из двух дорог ведет в деревню. Ему было неизвестно, с представителем какого племени он разговаривает. Тем не менее,

задумавшись на минуту, он задал *единственный* вопрос, из ответа на который он точно узнал, по какой дороге идти. Какой вопрос был задан?

5. В одной урне лежат два белых шара, в другой — два черных, в третьей — один белый шар и один черный. На каждой урне висела табличка, указывающая ее состав: *ББ, ЧЧ, БЧ*. Но какой-то шутник перевесил все таблички так, что теперь каждая из них указывает состав урны неправильно. Разрешается вынуть шар из любой урны, не заглядывая в нее. Какое наименьшее число извлечений потребуется, чтобы определить состав всех трех урн? (После каждого извлечения шар опускается обратно.)

6. Имеется 10 мешков монет. В девяти мешках монеты настоящие (весят по 10 г), а в одном мешке все монеты фальшивые (весят по 11 г). Одним взвешиванием определить, в каком мешке фальшивые монеты.

7. В автобусе без кондуктора ехало 20 человек. Хотя у них были только монеты достоинством в 10, 15 и 20 копеек, каждый из них расплатился за проезд и получил причитающуюся ему сдачу. Как это могло случиться? Докажите, что у них было не менее 25 монет. (Один билет стоит 5 коп.)

8. Доказать, что в любой группе из шести школьников всегда имеется либо трое школьников, которые все знакомы друг с другом, либо трое школьников, каждый из которых не знаком с двумя другими.

9. В шахматном турнире участвовало n шахматистов — гроссмейстеры и мастера. После окончания турнира оказалось, что каждый участник набрал ровно половину своих очков в партиях против мастеров. Доказать, что \sqrt{n} — целое число.

10. Сеть автобусных маршрутов в городе Лиссе устроена так, что: а) на каждом маршруте имеется три остановки; б) любые два маршрута либо вовсе не имеют общих остановок либо имеют только одну общую остановку. Какое наибольшее число маршрутов может быть в этом городе, если известно, что имеется всего девять различных остановок?

11. В некоторой стране между любыми двумя городами имеется непосредственное железнодорожное сообщение, но только в одном направлении. Доказать, что существует такой город, в который из любого другого города можно попасть, проезжая не более чем через один промежуточный город.

Популярная игра в крестики — нулики состоит в следующем. Двое по очереди рисуют на доске, разбитой на клетки (чаще всего «доской» служит лист клетчатой бумаги) крестики и нулики. Первый игрок рисует крестики, второй — нулики. Выигрывает тот, кто первым поставит определенное количество своих знаков в ряд (по вертикали, горизонтали или диагонали). Следующие три задачи относятся к этой игре.

12. Докажите, что при игре в крестики — нулики второй игрок, как бы хорошо он ни играл, не может рассчитывать больше чем на ничью, если его партнер играет правильно.

13. Пусть игра ведется на листе клетчатой бумаги (обычного школьного формата) до четырех знаков подряд. Докажите, что при правильной стратегии крестики выигрывают не более чем за шесть ходов.

14**. Пусть игра ведется до трех знаков подряд. Какое наименьшее число клеток должна содержать доска, чтобы начинающий мог выиграть, как бы ни играл его противник? [Нарисовать доску (произвольной формы) с минимальным количеством клеток и доказать, что на любой доске с меньшим числом клеток второй игрок может избежать поражения.]

15. В стране Лемниската объявлен конкурс на типовой проект квартиры, предназначенной для заселения одной, двумя, тремя или четырьмя семьями. Требуется, чтобы число комнат в квартире было наименьшим и чтобы во всех случаях жилплощадь можно было поделить поровну между вселяемыми семьями. Представьте ваши предложения относительно числа и размера комнат.

16. Двое играют на листе клетчатой бумаги по следующим правилам. Первый проводит отрезок, совпадающий со стороной клетки. Второй продолжает эту линию, проводя из конца первого отрезка свой отрезок, также совпадающий

17. Доказать, что в предыдущей игре начинающий может играть так, чтобы партия закончилась вничью.

18. У князя Гвидона было трое сыновей. Среди его потомков 93 имели каждый по двое сыновей и ни одной дочери, а все прочие умерли бездетными. Сколько всего потомков было у князя Гвидона?

19. Круг разбит на шесть секторов, в каждом секторе лежит по одной монете. Одним ходом разрешается любую монету передвинуть в один из двух соседних секторов. Можно ли все монеты собрать в одном секторе, сделав ровно 20 ходов?

20. Круг разбит на 14 равных секторов и в четырех соседних секторах расположены монеты достоинством 1, 2, 3 и 5 копеек (рис. 3). Разрешается передвигать любую из монет через три сектора в четвертый. После серии ходов монеты оказываются в исходных четырех секторах. В каком

порядке они могут располагаться? Найти все возможности и доказать, что других возможностей нет.

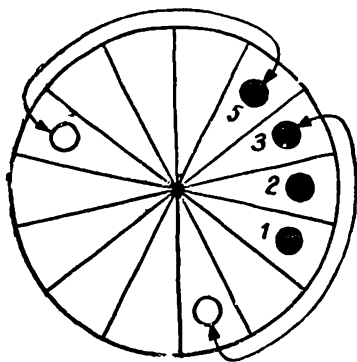


Рис. 3.

21a*. Меню в школьном буфете постоянно и состоит из n различных блюд. Чтобы разнообразить свое питание, Петя решил каждый день выбирать себе завтрак по-новому *). Сколько дней ему удастся это делать? Сколько всего блюд он съест за это время?

б*. (Продолжение.) Петин приятель Вася решил последовать примеру Пети, но съедать каждый день нечетное число блюд. Сколько дней ему удастся это делать? Сколько блюд он съест?

22.** Круг разбит на 256 секторов. Доказать, что можно написать в каждом секторе такое восьмизначное число, состоящее только из единиц и двоек (например, 12212111, 22121121), что: а) любые два числа будут различны, б) каждые два числа, стоящие в соседних секторах, будут различаться только в одном разряде.

23*. Каких чисел среди всех чисел от 0 до 9 999 999 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в записи которых единицы нет?

*) Это значит, что ни в какие два дня его завтрак не состоял из одних и тех же блюд. Предполагается, что Петя может съесть за день любое число блюд от 0 до n .

24. Шириной прямоугольника называется длина наименьшей из его сторон *). Сколькими различными способами можно вырезать из квадратного листа бумаги, состоящего из 100 клеток, прямоугольник ширины 3? (Разрезы должны идти только по границе клеток.)

25. Плитка шоколада состоит из 5×8 квадратных долек. Плитка разламывается по прямым, разделяющим дольки, до тех пор, пока не получится 40 отдельных долек. Сколько раз придется ломать плитку? (Найти все решения.)

26. Требуется распилить деревянный куб с ребром 40 см на 64 кубика с ребром 10 см (рис. 4). Это легко сделать девятью разрезами, если не сдвигать распиленные части друг относительно друга. На сколько можно уменьшить это число разрезов, если каждый раз перекладывать распиленные части?

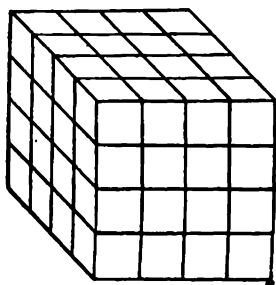


Рис. 4.

27**. Сколькими различными способами можно разделить 25 одинаковых монет между четырьмя школьниками? (Два способа считаются различными, если при них хотя бы один из школьников получает разные суммы денег.)

28**. В марсианском языке алфавит состоит из букв *A* и *O*. Каждые два слова одинаковой длины отличаются по крайней мере в трех местах. Доказать, что число слов длины n не более $2^n/(n+1)$.

29**. Куб покрасили снаружи белой краской и распилили на 64 маленьких кубика. Затем из маленьких кубиков произвольным образом составили куб. (Кубики могли не только поменяться местами, но и повернуться.) Какова вероятность того, что он будет белым снаружи? (Все способы составления большого куба считаются равновероятными.)

30. Имеется 111 ламп, причем каждая лампа имеет свой выключатель. Разрешается одновременно переключить

*) Ширина квадрата — длина любой из его сторон.

чить 13 из них. В начальный момент некоторые лампы горят, некоторые погашены.

а) Можно ли погасить все лампы?

б) Сколько потребуется для этого переключений, если вначале горели все лампы?

31. Город Сигмаград имеет форму квадрата со стороной 5 км (рис 5). Улицы делят его на кварталы, являющиеся квадратами со стороной 200 м. Какую наибольшую площадь можно обойти, пройдя по улицам этого города 10 км и вернувшись в исходную точку?

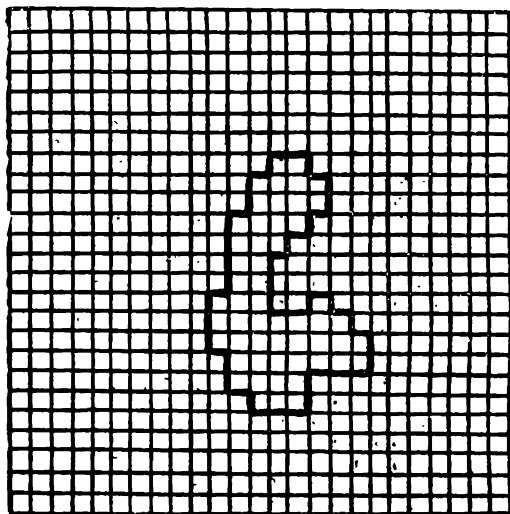


Рис. 5.

32. На доске 10×10 клеток для игры в «морской бой» расположен четырехклеточный «корабль» $\square\square\square\square$. Какое наименьшее число «ударов» нужно произвести, чтобы попасть в корабль? (Указать способ нанесения данного числа ударов и доказать, что при меньшем числе ударов всегда можно расположить корабль так, что он не будет обнаружен.)

33**. Домино состоит из двух квадратов. Назовем «тримино» фигуру $\square\square\square$, составленную из трех квадратов. Шахматная доска из 8×8 полей покрыта двадцатью одним тримино, так, что каждое тримино покрывает

гри поля. Одно поле остается свободным. Какое это может быть поле?

34**. На бесконечной шахматной доске расставлены пешки через три поля на четвертом (рис. 6). Доказать, что

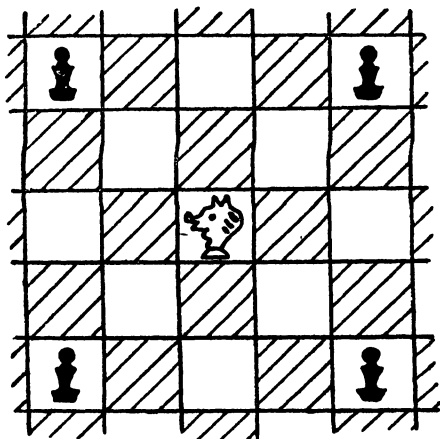


Рис. 6.

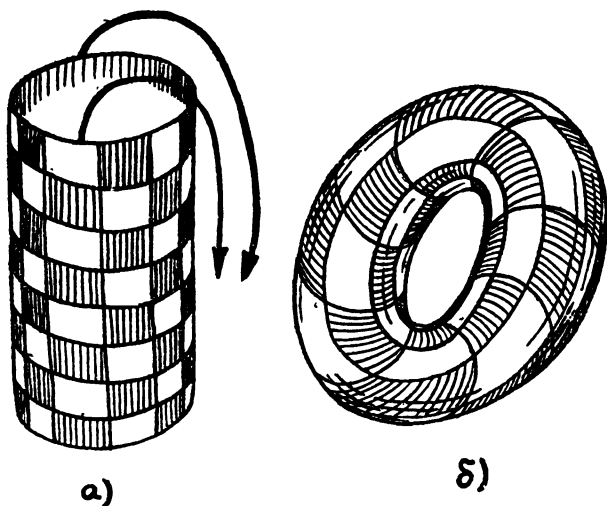


Рис. 7.

конь не может обойти все свободные поля, побывав на каждом поле по одному разу.

35.** Доказать, что существует ровно восемь способов обойти конем шахматную доску размером 3×4 так, чтобы побывать по одному разу на каждом поле, и нет ни одного способа обхода, при котором конь последним ходом возвращается на исходное поле. (Два способа обхода доски, получающиеся один из другого, если делать те же ходы в обратном порядке, считаются одинаковыми.)

36.** Склеим шахматную доску (сделанную из резины) бубликом (рис. 7а), б)). Доказать, что на такой доске нельзя расставить восемь ферзей так, чтобы они не били друг друга. (На обычной шахматной доске такая расстановка возможна; см. рис. 8.)

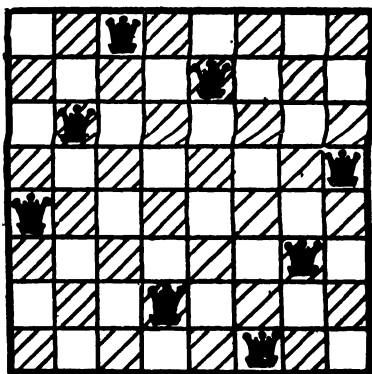


Рис. 8.

37. Требуется расставить несколько слонов на шахматной доске так, чтобы все поля держались ими под угрозой и чтобы каждый слон был защищен другими (т. е. поле, на котором он стоит, находилось под ударом каких-то других слонов). Какое наименьшее число слонов достаточно для этого?

* *
*

38. В 4 «А» классе учатся 30 человек. Во время диктанта один ученик сделал 12 ошибок, а остальные — меньше. Докажите, что в классе имеется по крайней мере три ученика, сделавших одинаковое количество ошибок.

39. 30 команд участвуют в первенстве по футболу. Каждые две команды должны сыграть между собой один матч. Доказать, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей.

40. Доказать, что 23 октября 1965 года в кинотеатре «Мир» на первом сеансе присутствовало минимум двое

зрителей, имеющих среди сидящих в зале одинаковое число знакомых (известно, что в первом ряду сидело 5 человек).

41. Дано 20 целых положительных не равных между собой чисел, меньших 70. Доказать, что среди их разностей найдутся 4 одинаковые.

42. Школьник в течение года решает задачи; каждый день — хотя бы по одной задаче. Каждую неделю, чтобы не переутомляться, он решает не больше 12 задач. Доказать, что найдется несколько последовательных дней, в которые он решит ровно 20 задач.

43. В городе Лиссе 10 000 телефонов, номера которых задаются четырехзначными числами. В центральном районе установлено более половины всех телефонов. Доказать, что хотя бы один из номеров центральных телефонов равен сумме двух номеров других центральных телефонов (или удвоенному номеру такого телефона).

44. Имеется $2k + 1$ карточек, занумерованных последовательными натуральными числами от 1 до $2k + 1$. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлеченных номеров не был равен сумме двух других извлеченных номеров?

45. В строку выписано k чисел. Доказать, что всегда найдется несколько чисел, стоящих рядом, сумма которых делится на k .

46. Докажите, что среди любых девяти последовательных натуральных чисел найдется по крайней мере одно число, взаимно простое с каждым из остальных.

47. Все целые числа от 1 до 10 включительно расположили в произвольном порядке и затем каждое сложили с номером места, на котором оно стоит. Доказать, что хотя бы у двух из полученных сумм стоит на конце одна и та же цифра.

* *

*

48. В равенстве

$$ЛИК \times ЛИК = БУБЛИК$$

вместо каждой буквы надо подставить определенную цифру так, чтобы получилось тождество (различным буквам соответствуют различные цифры).

Та же задача для равенства

$$СУК \times СУК = БАРСУК.$$

49. Вот еще один арифметический шифр. Он был прислан авторам Петей Ивановым. К сожалению, Петя поставил кляксу на две буквы. Однако, авторы разгадали этот шифр. Попробуйте и вы. Вот этот шифр:

$$\begin{array}{r} \text{АЖУР} \\ \times \text{АЖУР} \\ \hline \text{АБАЖУР} \end{array}$$

50. В кружках, расположенных в вершинах квадрата и его центре (рис. 9), расставьте пять натуральных чисел так, чтобы каждые два числа, соединенные отрезком, имели общий делитель, отличный от 1, а любые два числа, не соединенные отрезком, были бы взаимно просты.

Решите ту же задачу для фигур, показанных на рисунках 10 и 11.

51. Найти все натуральные числа N , обладающие тем свойством, что первые несколько цифр числа N^2 составляют число N .

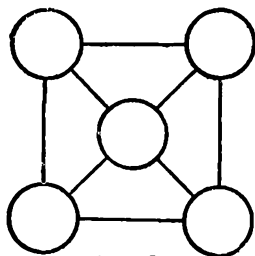


Рис. 9.

52. Докажите, что если числа m и $m^2 + 2$ простые, то число $m^3 + 2$ тоже простое.

53. Обозначим n -е простое число через p_n . Доказать, что если $n \geq 12$, то $p_n > 3n$.

54. Доказать, что тысячезначное число, все цифры которого пятерки, за исключением, быть может, одной, не является полным квадратом.

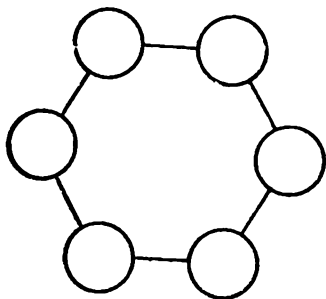


Рис. 10.

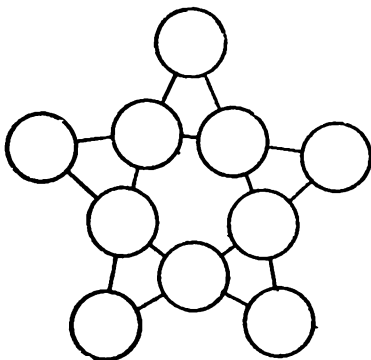


Рис. 11.

55. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}?$$

56. Пусть k — число делителей числа n . Доказать, что $k^2 < 4n$.

57. Может ли четырехзначное число с цифрами 4, 6, X и Y , записанными в произвольном порядке, быть равно $46(10X + Y)$?

58. Выписываются числа $1, 2, 3, \dots, 1000\,000\,000$. Затем каждое из чисел заменяется суммой его цифр и т. д. до тех пор, пока в ряду не будут только однозначные числа. Каких цифр в этом ряду больше: единиц или пятерок?

59. Доказать, что если число делится на 99, то сумма его цифр не меньше 18.

60. Доказать, что число, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц, делится на 3^n .

61. Доказать, что если число l не делится ни на 2, ни на 5, то найдется делящееся на l число, десятичная запись которого состоит из одних единиц.

62. Доказать, что если натуральные числа от 1 до 1967 включительно выписаны подряд в произвольном порядке, то получившееся число не является точным кубом.

63*. Доказать, что ни для одного многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами не могут иметь места равенства

$$f(7) = 11, \quad f(11) = 13.$$

64*. Пусть $P(x)$ — многочлен 4-й степени с целыми коэффициентами. Предположим, что при любом целом значении x $P(x)$ — целое число, делящееся на 5. Доказать, что все коэффициенты многочлена $P(x)$ делятся на 5.

65*. Имеется многочлен $P(x)$ 4-й степени, который принимает целые значения при целых значениях x . Доказать, что все коэффициенты многочлена $24 P(x)$ — целые.

Содержание последующих трех задач составляет доказательство теоремы, которая обобщает результат предыдущей задачи на случай многочленов любой степени.

66а*. Доказать, что многочлен

$$Q_n(x) = \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{n!}$$

принимает целые значения при всех целых x .

б*. Всякий многочлен $P(x)$ степени n можно представить в виде

$$P(x) = b_0 Q_n(x) + b_1 Q_{n-1}(x) + \dots + b_n,$$

где b_0, b_1, \dots, b_n — некоторые действительные числа, а $Q_i(x)$ — многочлены, введенные в задаче 66а.

в*. Доказать теорему: если многочлен $P(x)$ степени n при всех целых x принимает целые значения, то коэффициенты многочлена $n! P(x)$ — целые числа.

67*. Доказать, что число $1967k + 3$ при любом целом k не является полным кубом.

68. Дана последовательность: 1, 1, 2, 3, 7, 22 ... Каждый член равен произведению предыдущих двух плюс 1. Доказать, что ни один член последовательности не делится на 4.

69**. Пусть $\sin x = \frac{3}{5}$. Доказать, что $5^{25} \sin 25x$ — целое число, не делящееся на 5.

70. В Швамбрании автобусные билеты имеют номера от 000 001 до 999 999. Швамбраны считают счастливыми билеты, у которых сумма трех первых цифр номера равна сумме трех последних. Доказать, что сумма номеров всех счастливых билетов делится на 13.

71. Коля, Леня и Миша сложились и купили футбольный мяч. Сумма денег, вложенных каждым из них, не превосходит половины суммы, вложенной двумя остальными. Сколько денег вложил Миша, если мяч стоил 6 рублей?

72. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем все семь собрали разное число грибов. Докажите, что есть трое грибников, которые вместе собрали не меньше 50 грибов.

73. На доске было написано пять целых чисел. Сложив их попарно, получили следующие десять чисел:

0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15.

Какие пять чисел были написаны на доске? Можно ли таким способом получить следующие десять чисел:

12, 13, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 20?

74. 30 студентов с пяти курсов придумали 40 задач для олимпиады, причем однокурсники — одинаковое число задач, а студенты с разных курсов — разное. Сколько студентов придумали ровно по одной задаче?

75. Доказать, что в любом шестизначном числе можно переставить цифры так, чтобы сумма первых трех цифр нового числа отличалась от суммы последних трех цифр меньше чем на 10.

76**. По окружности расставлено несколько чисел, сумма которых положительна. Доказать, что можно выбрать такое из них, что оно само будет положительно, сумма его со следующим по часовой стрелке положительна и т. д.

77. На кольцевом шоссе длиной 300 км расставлены автомашины одной марки. Общего количества бензина в них хватит на 301 км. Гонщик выбирает по своему усмотрению одну из машин. Достигнув какой-то другой машины, он подзаправляется, забирая весь ее бензин. Доказать, что гонщик может объехать шоссе, не прибегая к услугам бензозаправки.

78. Доказать, что при любом натуральном n

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

79. При каких n существуют положительные числа x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющие равенствам

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 3?$$

80. Стекло имеет форму квадрата площади 1. На обеих сторонах этого стекла нарисованы карты, по пять стран на каждой карте. Страны на одной стороне стекла закрашены пятью различными красками. Требуется закрасить страны на противоположной стороне стекла теми же пятью красками так, чтобы: а) разные страны были закрашены разными красками; б) общая площадь участков стекла, окрашенных с обеих сторон в один цвет, была не меньше $\frac{1}{5}$. Всегда ли это можно сделать?

81. Из куска бронзы весом в 1 кг было изготовлено 100 медалей. Когда их взвешивали одну за другой, два последовательных веса ни разу не отличались больше чем на 20 г. Доказать, что все медали можно разбить на две группы по 50 медалей в каждой, чтобы веса групп различались не более чем на 20 г.

82а*. Пять комплексных чисел c_1, c_2, c_3, c_4 и c_5 связаны соотношением

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} = 0.$$

Доказать, что если точки плоскости, изображающие комплексные числа c_1, c_2, c_3, c_4 и c_5 , лежат в вершинах выпуклого пятиугольника, то точка 0 находится внутри этого пятиугольника.

б*. Даны n комплексных чисел c_1, c_2, \dots, c_n таких, что изображающие их точки плоскости являются вершинами выпуклого n -угольника. Доказать, что если

$$\frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \dots + \frac{1}{z - c_n} = 0,$$

то отвечающая z точка плоскости лежит внутри этого n -угольника.

83* Доказать, что если число α иррационально, то функция $f(x) = \cos x + \cos \alpha x$ непериодическая.

84. Путешественник желает последовательно побывать в пяти городах A, B, C, D и E . Все участки AB, BC, CD и DE имеют различную длину и каждый из них обслуживается четырьмя различными по скорости типами самолетов K, L, M и N . Доказать, что если путешественник хочет полетать на каждом из этих самолетов и затратить на дорогу наименьшее время, то он должен пользоваться тем более быстрым самолетом, чем длиннее участок пути.

* *

*

85. Бактерии имеют такой закон развития: каждая живет 1 час и каждые полчаса порождает одну новую (все-го две за свою жизнь). Каково будет потомство одной бактерии через 6 часов после ее рождения?

86. В некоторой точке прямой находится частица. За первую секунду она делится пополам и половинки расходятся в противоположные стороны на расстояние 1 от прежнего положения. За следующую секунду образовавшиеся частицы снова делятся пополам и половинки расходятся в противоположные стороны на расстояние 1 от прежних положений. Сталкиваясь, любые две частицы уничтожаются, так что, например, через две секунды останется только две частицы. Сколько частиц останется через 129 секунд?

87. Доказать, что не существует целых чисел k, l, m и n , удовлетворяющих следующим равенствам:

$$\begin{aligned} klmn - k &= 1966, \\ klmn - l &= 966, \\ klmn - m &= 66, \\ klmn - n &= 6. \end{aligned}$$

88*. Найти все действительные решения системы

$$x^4 - 17 = y^4 - 7 = z^4 + 19 = u^4 + 5 = x y z u.$$

89*. Решить уравнение

$$5^x + 12^x = 13^x.$$

90*. Решить уравнение

$$x = 1 - 1967(1 - 1967x^2)^2.$$

91*. Каждому действительному числу x поставлено в соответствие действительное число $A(x)$. Известно, что

для любых x и y :

$$a) \quad A(x + y) = A(x) + A(y),$$

$$b) \quad A(xy) = A(x) \cdot A(y).$$

Доказать, что либо $A(x) = x$, либо $A(x) = 0$.

92. Все натуральные числа произвольным образом разбиты на две группы. Доказать, что хотя бы в одной из них найдутся три числа, одно из которых является средним арифметическим двух других.

93. Можно ли разбить все натуральные числа на два множества так, чтобы ни одно из этих множеств не содержало никакой бесконечной арифметической прогрессии?

94. Во всякой бесконечной возрастающей арифметической прогрессии, составленной из натуральных чисел, встретится число, начинающееся цифрами 10. Доказать.

95. Доказать, что существует полный квадрат, начинающийся с любой комбинации цифр.

96**. Доказать, что среди чисел $0, 1, 2, \dots, 3^k - 1$ можно найти 2^k различных чисел так, чтобы никакое из них не являлось средним арифметическим двух других.

97**. Доказать, что среди 79 последовательных натуральных чисел всегда найдется число, сумма цифр которого делится на 13. Привести пример 78 последовательных чисел, суммы цифр которых не делятся на 13.

98**. Отметим на числовой прямой красным цветом все точки, отвечающие числам вида $81x + 100y$, где x и y — натуральные числа, а синим цветом — остальные целые точки.

Найти на прямой точку такую, что любые симметричные относительно нее целые точки закрашены в разные цвета.

99. Имеется некоторое число карточек. На каждой из них написано натуральное число. Для каждого $n \leq 1968$ имеется ровно n карточек, на которых написаны числа, являющиеся делителями n . Доказать, что число $2^{10} = 1024$ написано хотя бы на одной карточке.

100**. В условиях задачи 99 доказать, что любое число $n \leq 1968$ записано хотя бы на одной карточке.

101**. Пусть n — произвольное натуральное число, $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ — его разложение на простые множители (здесь p_1, p_2, \dots, p_k — простые числа, причем $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ *). Докажите, что число $\varphi(n)$ несократимых правильных дробей со знаменателем n выражается формулой

$$\varphi(n) = (p_1 - 1) \dots (p_k - 1) p_1^{n_1-1} \dots p_k^{n_k-1}.$$

102. В каждой вершине треугольника написано неотрицательное число, причем сумма всех этих чисел равна 3000. Каждое число заменяется на среднее арифметическое чисел, стоящих в соседних вершинах, и эта операция повторяется 10 раз. Доказать, что после этого каждое из чисел станет меньше чем 1002.

103**. Даны 1967 чисел

$$x_1 = 0, x_2, x_3, \dots, x_{1966}, x_{1967} = 0,$$

причем

$$x_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{4} + 1$$

при любом $i = 2, \dots, 1966$. Доказать, что

а) $0 \leq x_i \leq 2$ при $i = 0, 1, 2, \dots, 1967$;

б) $x_1 = x_{1967}, x_2 = x_{1966}, x_3 = x_{1965}, \dots$;

в) число x_{984} — наибольшее среди чисел x_1, \dots, x_{1967} и $x_1 < x_2 < \dots < x_{984}$.

* *
*

104. На классной доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, \dots, 1966$. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них их разность. Очевидно, что после 1965 повторений этой операции на доске останется одно число. Доказать, что это число нечетно.

105. На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стирать любые два знака, записывая вместо одинаковых знаков плюс, а вместо разных — минус. Доказать, что последний оставшийся на доске знак не зависит от того, в каком порядке стирать знаки.

*) Представление числа n в виде $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ единственно. Доказательство можно прочесть в книге А. Н и в е н, Числа рациональные и иррациональные, «Мир», М., 1966.

106. На доске нарисовано несколько окружностей, квадратов и треугольников. Разрешается стереть любые две фигуры, нарисовав вместо них третью по такому правилу: вместо пары окружностей — одну окружность, вместо пары квадратов — треугольник, вместо пары треугольников — квадрат, вместо окружности и квадрата — квадрат, вместо окружности и треугольника — треугольник, вместо квадрата и треугольника — окружность. Доказать, что форма фигуры, которая останется последней, не зависит от того, в каком порядке стираются фигуры.

107.** В языке племени «мумбо-юмбо» *) имеется четыре звука: *A*, *У*, *Ы* и *Е*. Звук *Е* — особый. Сказанный сам по себе, он означает некоторое слово, но если его присоединить к какому-нибудь слову (в начале, середине или в конце), то значение этого слова не изменится. Кроме того, если представитель племени произносит семь раз подряд звуки *A*, *У* или *Ы*, это значит то же самое, что он произнес один раз звук *Е*. Наконец, многие туземцы вместо *УУУЫ* предпочитают говорить *ЫУ*, вместо *ААЫ* — *ЫА* и вместо *УУУУА* — *АУ*, так что эти слова не различаются.

В племени 400 туземцев. Могут ли у всех них быть разные имена?

* *
*

108. Доказать, что $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ — число иррациональное.

109.** Доказать, что среди первых десяти миллионов цифр разложения $\sqrt{2}$ в десятичную дробь ни одна цифра не повторится 5 000 001 раз подряд.

110.** Доказать, что в числе $(6 + \sqrt{37})^{999}$ первые 999 знаков после запятой нули.

111.** С какой частотой встречается цифра 7 в десятичной записи натуральных чисел? Точнее говоря, найти предел отношения количества семерок в записи всех чисел от 1 до n к количеству всех десятичных знаков в записи тех же чисел при $n \rightarrow \infty$.

*) См. об этом племени в книге И. И л ь ф а и Е. П е т р о в а, Двенадцать стульев, изд-во художественной литературы, Москва, 1959 г., гл. 22.



РЕШЕНИЯ

1. Пусть первый разбойник разделит добычу на три, по его мнению, равные части, а второй и третий укажут на ту часть, которая им кажется большей. Если они указывают на разные части, то каждый берет ту часть, которую он считает большей, а первый берет оставшуюся часть. Если же они указывают на одну часть, то делят ее между собой, как рассказано в условии задачи. Затем второй и третий должны указать на ту из двух оставшихся частей, которая им кажется большей. Если они покажут на одну и ту же часть, то вновь делят ее между собой, а первый берет оставшуюся часть. Если же они укажут на разные части, то каждый из них делит понравившуюся ему часть с первым разбойником способом, рассказанным в условии задачи.

2. Будем решать задачу по индукции. Предположим, что n разбойников нашли уже способ разделить добычу безобидно. Допустим, что разбойников стало $n+1$. Разделим всю добычу между n разбойниками и затем предложим каждому из них разделить свою долю на $n+1$ равных частей (по его мнению, равных). Пусть теперь последний $(n+1)$ -й разбойник возьмет у каждого из них по одной из этих частей. При этом каждый из n разбойников получит, по его мнению, $n/(n+1)$ его прежней доли, а так как его прежняя доля составляла, по его мнению, не менее $1/n$ всей добычи, то он будет доволен. Ясно, что и последний разбойник не сможет жаловаться, так как он взял у каждого из своих товарищей не менее $1/(n+1)$ доли (по его мнению).

3. Условимся обозначать рыцарей из одного и из другого клана знаками $+$ и $-$ и объединим в группы всех сидящих рядом рыцарей из одного клана. При этом мы придем к схеме, подобной той, которая изображена на рис. 12. Удалим теперь всех рыцарей каждой группы, кроме последнего (считая рыцарей в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки). При этом мы придем к схеме рис. 13, на которой, очевидно, имеется одинаковое число рыцарей 1-го и 2-го клана. Следовательно, общее число рыцарей на этой схеме четно. Но переход от рис. 12 к рис. 13 как раз и означает, что мы удаляем всех рыцарей, справа от которых сидит друг, оставляя лишь та-

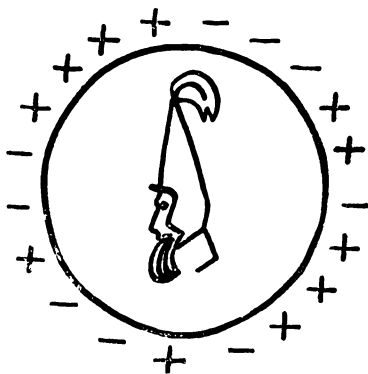


Рис. 12.

ких, справа от которых сидит враг. Согласно условию задачи число удаленных рыцарей равно четному числу оставшихся. Следовательно, общее число всех рыцарей делится на 4.

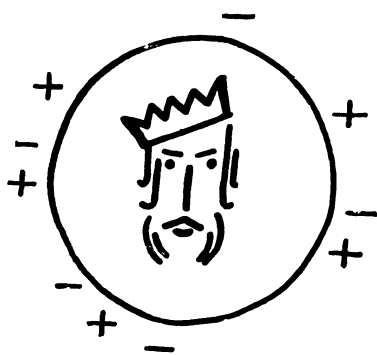


Рис. 13.

лжец и правдивый ответят: «Да», если же она не ведет, то любой местный житель ответит: «Нет».

4. Вот один из вариантов решения. Логик спрашивает, указывая на одну из дорог: «Если спросить любого представителя твоего племени, — Ведет ли эта дорога в деревню? — ответит ли он утвердительно?» Если эта дорога действительно ведет в деревню, то и

5. Достаточно извлечь один шар из урны с табличкой БЧ. Если он окажется белым, то в этой урне белые шары,

а черные шары должны быть в урне с табличкой *ББ*. Если же вынут черный шар, то в урне с табличкой *БЧ* черные шары, а в урне с табличкой *ЧЧ* белые.

6. Занумеруем мешки числами от 1 до 10. Возьмем из первого мешка одну монету, из второго — две, . . . , из десятого — десять, и определим их общий вес. Пусть он равен P . Если бы все монеты были настоящие, то они весили бы $10+20+\dots+100=550$ г. Избыток $P-550$ совпадает, очевидно, с номером мешка, в котором хранятся фальшивые монеты.

7. Докажем сначала, что у пассажиров было не менее 25 монет. Действительно, каждый пассажир должен получить сдачу, т. е. не меньше двадцати монет должно остаться на руках у пассажиров. В кассу опущен 1 рубль, следовательно, не меньше пяти монет (так как самая крупная из имеющихся монет — 20 копеек).

Покажем теперь, что положение, описанное в задаче, могло случиться. Действительно, в автобусе могли ехать пять групп по четыре человека, причем в каждой группе у одного человека было две десятикопеечные монеты, у двоих — по пятнадцатикопеечной и у одного — двадцатикопеечная. Первый отдал второму и третьему по 10 копеек и взял у второго 15 копеек. Третий отдал четвертому свои 15 копеек, а четвертый опустил свои 20 копеек в кассу.

8. Пусть A — один из наших шести школьников. Если A знаком не более чем с двумя школьниками из нашей группы, то в группе имеются три школьника, не знакомых с A . Если все эти школьники знакомы друг с другом, то они уже образуют тройку попарно знакомых; если же какие-либо два из них не знакомы друг с другом, то они вместе с A составляют тройку учащихся, никакие два из которых не знакомы.

Остается рассмотреть случай, когда A знаком более чем с двумя школьниками. В таком случае найдутся трое, с которыми A знаком. Если никакие двое из этих трех не знакомы друг с другом, то мы уже имеем тройку попарно незнакомых. Если же какие-либо два из этих трех школьников знакомы, то вместе с A они образуют тройку попарно знакомых.

9. Число партий, сыгранных k участниками турнира между собой, равно $k(k-1)/2$. Действительно, каждый

из k участников должен сыграть с каждым из $k - 1$ остальных, но при этом в произведении $k(k - 1)$ каждая партия учитывается дважды, так как в ней участвуют двое.

Обозначим число мастеров через m , число гроссмейстеров через g , при этом $m + g = n$. Как бы ни окончилась партия между двумя партнерами, суммарное количество очков, набранных обоими, в результате увеличится на 1. Значит, сумма очков, набранных мастерами в партиях против мастеров, равна числу партий, сыгранных между мастерами, т. е. $m(m-1)/2 = (m^2 - m)/2$. Так как каждый мастер половину своих очков набрал в партиях с гроссмейстерами, то общее количество очков, набранных мастерами в партиях против гроссмейстеров, также равно $(m^2 - m)/2$. Точно так же доказывается, что сумма очков, набранных гроссмейстерами в их партиях против мастеров, равна $(g^2 - g)/2$. Число партий, в которых гроссмейстер играл против мастера, равно mg . Отсюда

$$\frac{m^2 - m}{2} + \frac{g^2 - g}{2} = mg$$

или

$$m^2 - 2mg + g^2 = m + g = n,$$

т. е. $n = (m - g)^2$, что и требовалось доказать.

(В дальнейшем вместо последних слов будем иногда писать сокращенно ч. т. д.)

10. Рассмотрим какую-нибудь остановку A . Определим, сколько маршрутов может через нее проходить. Кроме A , в городе еще восемь остановок. На каждом маршруте, проходящем через A , есть еще две остановки. Так как никакие два из этих маршрутов не могут иметь общих остановок, отличных от A , то всего через A может проходить не более, чем $8 : 2 = 4$ маршрута.

Занумеруем все остановки и обозначим через a_i число маршрутов, проходящих через i -ю остановку. Так как на каждом маршруте три остановки, то

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 3n,$$

где n — общее число маршрутов. По доказанному все слагаемые не превосходят четырех. Значит,

$$3n \leq 4 \cdot 9 = 36 \text{ и } n \leq 12.$$

На рис. 14 изображена схема, удовлетворяющая условиям задачи и содержащая 12 маршрутов (восемь прямых и четыре криволинейных).

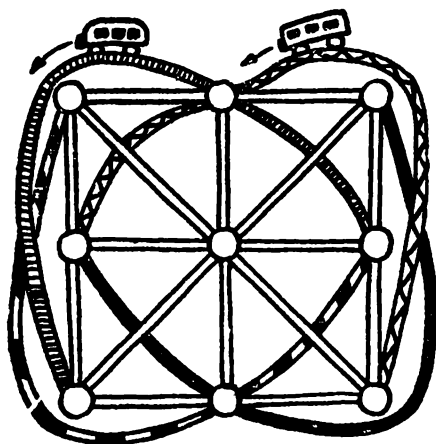


Рис. 14.

11. Назовем «соседями города N » те города, из которых можно попасть в N непосредственно, а «близкими к N » — те города, из которых можно попасть в N , проезжая не более чем через один промежуточный город. Пользуясь методом математической индукции, докажем, что утверждение задачи справедливо (т. е. что найдется город N , к которому остальные близки), каково бы ни было число городов в стране. Для стран, в которых всего два города, утверждение очевидно. Допустим, что утверждение задачи доказано для стран, в которых n городов, и докажем его для страны, в которой $n + 1$ городов. Нанесем на схему дороги, соединяющие какие-нибудь n городов. Эта сеть дорог удовлетворяет условию задачи и, по предположению индукции, существует такой город A , что остальные $n - 1$ городов близки к A , т. е. каждый из них является соседом A или соседом одного из соседей A . Если $(n + 1)$ -й город B тоже близок к A , то все города страны близки к A . Если это не так, то, как видно из условия задачи, город A и все его соседи являются соседями B .

Каждый из остальных городов является соседом одного из соседей A и, значит, близок к B . В этом случае все города страны близки к B . Все доказано.

12. Докажем, что у начинающего (крестики) есть способ выиграть или добиться ничьей. Допустим, что это не так. Тогда, как бы он ни играл, «нулики» всегда (применяя наилучшую стратегию) выигрывают. Но начинающий, поставив первый крестик куда угодно, может затем пользоваться наилучшей стратегией нуликов, мысленно поменяв крестики и нулики местами. Лишний знак ему при этом, конечно, может только помочь. При такой игре крестики обязательно выиграют, что противоречит нашему предположению.

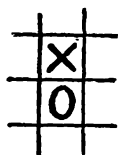
13. Начинающий должен поставить первый крестик не слишком близко к границе (не ближе чем на семь клеток). Легко понять, что наилучший метод защиты для второго игрока состоит в том, чтобы поставить первый нулик по соседству с крестиком. Имеются две принципиально разные возможности (рис. 15, а и б); прочие сводятся к изображенным поворотом листа. Разберем более трудный вариант б). Первый игрок ставит крестик, как это показано на рис. 15, в. Если нулик не будет поставлен на заштрихованное поле, то крестики выигрывают через два хода, поставив четыре знака по вертикали. Наилучший второй ход нуликов и ответ крестиков изображены на рис. 15, г. Теперь крестики имеют две свободных «двойки» по диагоналям. Проигрыш нуликов неизбежен. Они лишь могут оттянуть поражение, сыграв как это изображено на рис. 15, д. После ответа крестиков (рис. 15, е), нулики проигрывают через два хода по одной из диагоналей.

Случай а) проще. При таком варианте крестики выигрывают за пять ходов. Начало партии изображено на рис. 15, ж, з, и.

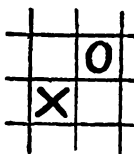
14. На доске из семи клеток, показанной на рис. 16, а, начинающий может выиграть, как бы ни играл его противник: сначала он ставит крестик на пересечении рядов, а затем на одну из средних клеток в ряду, на котором нет нуля.

При любом ходе противника начинающий может выиграть на третьем ходу. Если доска состоит не более чем из шести клеток, то второй участник всегда может предотвратить победу первого. Докажем это.

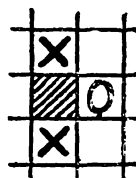
Будем называть тройкой три рядом стоящие клетки. На рис. 16, б имеется четыре тройки: (1, 2, 3); (2, 3, 4); (3, 4, 5) и (4, 5, 6), а на рис. 16, д три тройки: (1, 2, 3); (3, 5, 6) и (1, 4, 6).



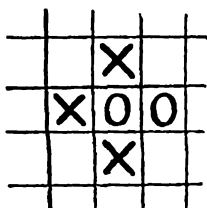
a)



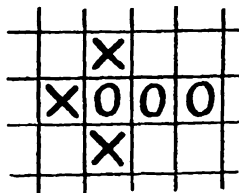
б)



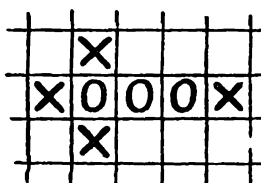
в)



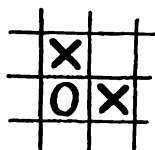
г)



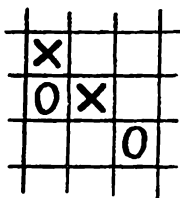
д)



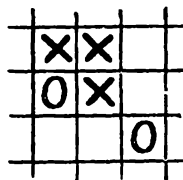
е)



ж)



з)

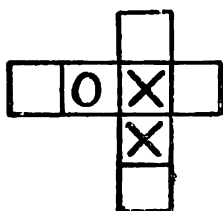


и)

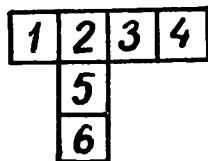
Рис. 15.

Чтобы предотвратить победу начинающего, второму участнику достаточно поставить по одному нулику на каждую тройку. Если имеется не более двух троек, то второй участник может двумя ходами «перекрыть» их.

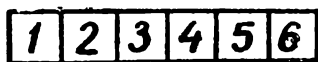
Предположим, что имеется более двух троек. Если рядом стоит пять или шесть клеток, то все тройки находятся в этом ряду (рис. 16, б и в). Поставив нулик на третью или



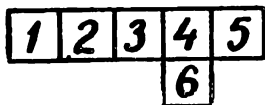
а)



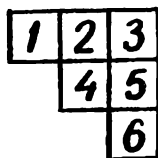
г)



д)



в)



ж)

Рис. 16.

четвертую от края клетку, второй участник оставляет только одну неперекрытую тройку. Вторым ходом он может перекрыть и эту тройку. Если имеется четыре рядом стоящие

клетки, то существует самое большое одна тройка, не стоящая в этом ряду (рис. 16, з). Заняв одну из двух средних клеток ряда длины 4, второй участник перекрывает обе тройки, стоящие в этом ряду.

Остается рассмотреть случай, когда никакие четыре клетки не стоят в ряд (легко видеть, что при этом шесть клеток могут содержать не более трех троек). Если имеются три тройки, то каждые две из них должны иметь общую клетку (рис. 16, д) и есть три такие клетки, в которых пересекаются по две тройки. Поставив нулик на одну из этих клеток, второй участник первым же ходом перекроет две из трех троек; третью он перекроет вторым своим ходом.

15. Обозначим площадь квартиры через 1. Нетрудно проверить, что шесть комнат, площади которых равны

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12},$$

удовлетворяют условиям задачи. Пяти комнат недостаточно. В самом деле, при расселении трех семей в пяти комнатах по крайней мере одна семья получит только одну комнату, и площадь этой комнаты должна быть $\frac{1}{3}$. При размещении четырех семей та семья, которой достанется эта комната, получит площадь большую, чем $\frac{1}{4}$, что противоречит условию.

16. Допустим, что игра закончилась результативно на n -м ходе какой-то игрок проиграл. Тогда перед $(n-1)$ -м ходом была такая ситуация (рис. 17, а): игрок, который делал $(n-1)$ -й ход, провел отрезок OA , после чего все отрезки, выходящие из точки O , оказались занятыми. Точка O может быть только начальной точкой игры. В самом деле, если внутренняя точка O не является начальной, то перед попаданием в нее могут быть заняты либо два входящих в O отрезка, либо ни одного (см. рис. 17, б, в). Но ломаная, выходящая из какой-то точки и возвращающаяся в нее, обязана иметь четное число звеньев. (Действительно, число шагов вверх должно равняться числу шагов вниз, а число шагов влево — числу шагов вправо.) Поэтому номер последнего хода четный и этот ход сделал второй игрок.

17. Первый игрок должен делать все свои ходы в одном направлении (скажем, вверх). При этом ломаная не будет

19. Докажем, что этого сделать нельзя. Заштрихуем секторы I, III и V, как показано на рис. 19. Обозначим число монет в заштрихованных секторах перед n -м ходом через a_{n-1} . Очевидно, что $a_0 = 3$ и каково бы ни было $k \geq 1$, a_k отличается от a_{k-1} на 1. Значит, $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{17}, a_{19}$ — числа

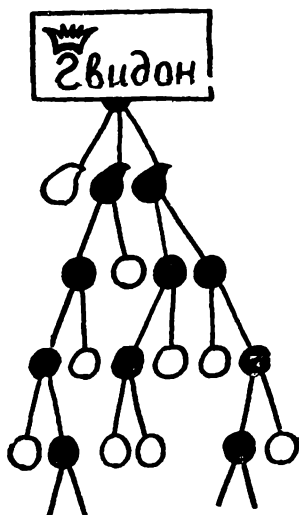


Рис. 18.

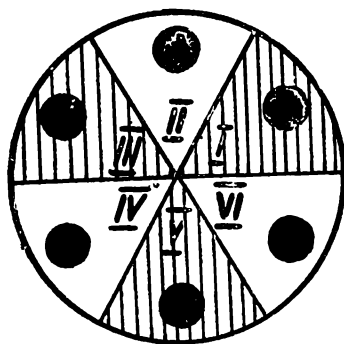


Рис. 19.

четные, а $a_0, a_2, a_4, \dots, a_{18}, a_{20}$ — нечетные. Следовательно, через 20 ходов число монет в заштрихованных секторах будет нечетным. Но если бы все монеты стояли в одном секторе, то это число было бы четным (равным 0 или 6).

20. Занумеруем секторы цифрами от 1 до 14. После каждого шага номер занимаемого монетой сектора изменяется на 4 или на 10 (рис. 20, а). Поэтому его четность не меняется. Монеты в 1 и 3 копейки могут двигаться лишь по нечетным секторам, монеты в 2 и 5 копеек — по четным секторам. Значит, в принципе возможны лишь четыре расположения монет в исходных секторах. Они изображены на рисунках 20, а, б и 21, а, б. Не трудно указать последовательность ходов, приводящую к каждому расположению. На рис. 22 пунктиром показан метод получения расположения 20, б. В трех оставшихся случаях укажите подобный метод сами.

В ряде последующих задач мы будем пользоваться следующей леммой:

Основная лемма. Назовем словом длины k набор из k каких-нибудь символов. Допустим, что первую букву

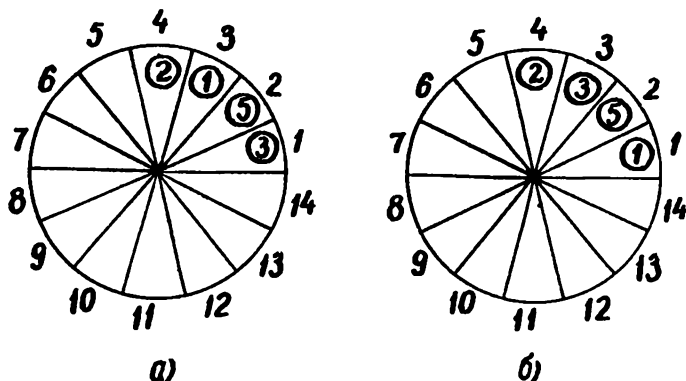


Рис. 20.

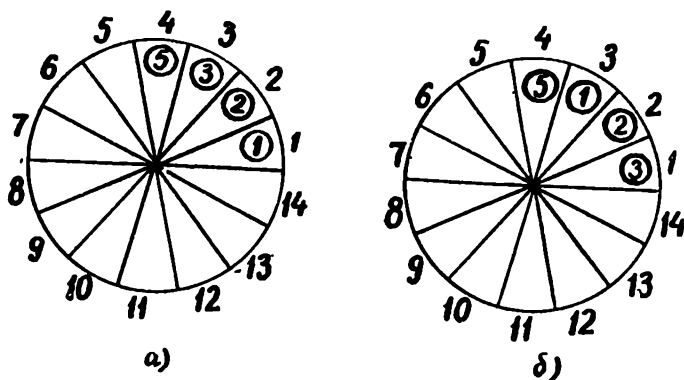


Рис. 21.

слова (первый символ) можно выбрать n_1 способами, вторую букву — n_2 способами, третью — n_3 способами, ..., последнюю k -ю можно выбрать n_k способами. Тогда существует всего $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$ слов.

Доказательство. Докажем эту лемму индукцией по k . При $k = 1$ утверждение очевидно. Допустим,

что оно справедливо при $k = s$. Пусть теперь $k = s + 1$ и $(s + 1)$ -ю букву можно выбрать n_{s+1} способами. Из каждого слова длины s можно получить n_{s+1} слов длины $s + 1$, приписывая к нему на $(s + 1)$ -м месте одну из n_{s+1}

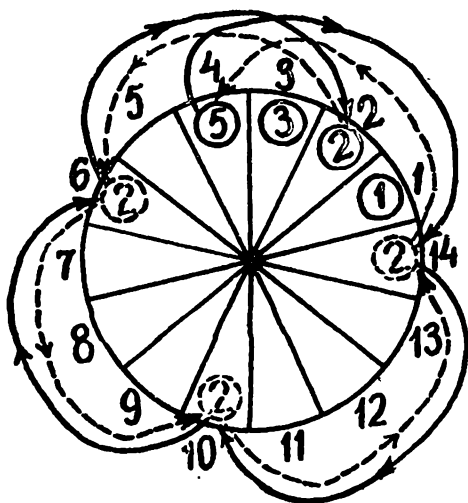


Рис. 22.

допустимых букв. Но число слов длины s , по предположению индукции, равно $n_1 n_2 \dots n_s$, так что число слов длины $s + 1$ равно $n_1 n_2 \dots n_s n_{s+1}$, что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е 1. Если каждую букву слова можно выбрать l способами, то число слов длины k равно l^k .

С л е д с т в и е 2. Число слов длины n , которые можно составить из n различных букв, равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$.

В самом деле, на первое место можно поставить любую из n букв, на второе — любую из $n - 1$ оставшихся, и т. д., на последнее — единственную оставшуюся.

С л е д с т в и е 3. Число слов длины n , которые можно составить из k букв одного типа (скажем, α) и $n - k$ букв другого типа (скажем, β) равно $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} = C_n^k$.

(выражение C_n^k называется числом сочетаний из n по k).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Число различных слов длины n равно числу способов расставить k букв α на n местах.

(На оставшихся местах будут стоять буквы β .) Занумеруем эти k букв. Первую букву α можно поставить на одно из n мест, вторую — на одно из $n - 1$ оставшихся мест, и т. д., k -ю — на одно из $n - k + 1$ мест. Общее число таких расстановок равно

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Вспомним теперь, что буквы α неразличимы. Если переставить буквы α на уже занятых ими местах (а таких перестановок имеется $k!$), то слово не изменится. Поэтому общее число слов действительно равно

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = C_n^k.$$

21 а,б. Предположим, что Петя отмечает ежедневно в меню плюсами те блюда, которые он выбирает, и минусами — остальные блюда. Ясно, что искомое число дней равно числу различных наборов из плюсов и минусов общей длины n . По основной лемме (точнее, по следствию 1 из нее) таких наборов имеется 2^n .

Число способов составления «программы» завтрака из нечетного количества блюд равно числу всех различных завтраков, которые можно составить из $n - 1$ блюд. В самом деле, Вася может выделить какое-нибудь блюдо, скажем, манную кашу, и, составив «программу» из $n - 1$ оставшихся блюд, так распорядиться манной кашей, чтобы общее число блюд стало нечетным. Поэтому Вася может питаться, с соблюдением своего условия, 2^{n-1} дней.

Перейдем ко второму вопросу. Покажите сами (используя предыдущие рассуждения), что каждое блюдо Петя брал на завтрак 2^{n-1} раз. Так как общее число блюд в меню равно n , то за все время Петя съел $n2^{n-1}$ блюд. Точно так же доказывается, что Вася съел всего $n2^{n-2}$ блюд.

22. Докажем по индукции, что при любом n можно написать в 2^n секторах круга числа, составленные из n единиц и двоек, так, чтобы выполнялись требования а) и б), сформулированные в условии задачи.

При $n = 1$ утверждение тривиально. Пусть оно верно при $n = k$. Чтобы получить нужное расположение чисел при $n = k + 1$, поступим следующим образом. Каждый

сектор Δ_k (из k имеющихся) разобьем на два. В этих двух секторах напомним $(n + 1)$ -значные числа так, чтобы первые n цифр этих чисел совпадали с цифрами числа, которое было написано в секторе Δ_k , а последние были бы расположены по такому закону, как изображено на рис. 23. Легко понять, что полученные 2^{k+1} чисел записаны

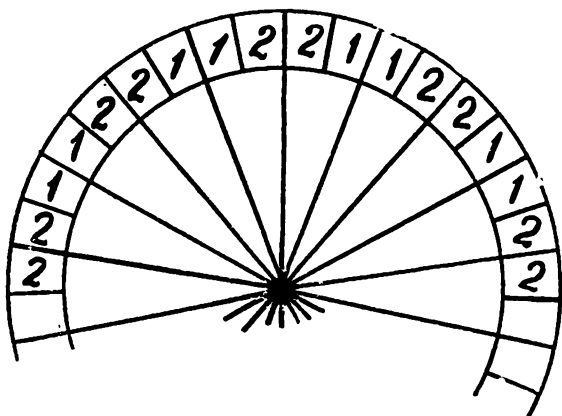


Рис. 23.

с соблюдением условий а) и б) задачи. Утверждение доказано в общем виде. При $n = 8$ получается частный случай, о котором шла речь в условии задачи.

23. Условимся записывать любое число от 0 до 9 999 999 семью цифрами, приписывая спереди, если потребуется, нужное количество нулей. Например,

$$0 = 0\ 000\ 000, \quad 137 = 0\ 000\ 137 \text{ и т. п.}$$

Посчитаем теперь количество чисел, в записи которых нет единицы. Любое такое число получается, если написать подряд семь цифр, каждая из которых может принимать девять значений: 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Всего таких чисел имеется $9^7 = 4\ 782\ 969$ (см. основную лемму, стр. 35). Так как всего имеется 10^7 семизначных чисел, то доля чисел, в записи которых нет единицы, равна $(9^7/10^7) = 0,4782969$. Поэтому доля чисел, в записи которых есть единица, превосходит 0,5, т. е. таких чисел больше, чем чисел, в записи которых единицы нет.

24. Назовем длиной прямоугольника длину большей его стороны (длина квадрата равна его ширине). Подсчитаем число различных прямоугольников длины l , где $l = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Такие прямоугольники бывают горизонтальными и вертикальными, соответственно тому, горизонтальна или вертикальна их большая сторона. Вертикальных прямоугольников размером $3 \times l$ существует столько, сколько различных положений может занимать внутри исходного квадрата правая верхняя клетка такого

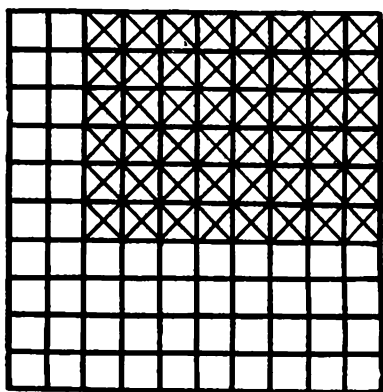


Рис. 24.

прямоугольника, т. е. $8(11 - l)$ (рис. 24, на котором крестиками отмечены положения, которые может занимать верхняя правая клетка, если $l = 5$).

Столько же существует и горизонтальных прямоугольников $3 \times l$, так что общее число таких прямоугольников равно $16(11 - l)$. Точно так же находим и число различных квадратов 3×3 ; оно равно 8^2 . Общее число прямоугольников ширины 3 равно

$$\begin{aligned} &16(11 - 4) + 16(11 - 5) + \dots + 16(11 - 10) + 8^2 = \\ &= 16(1 + 2 + \dots + 7) + 8^2 = 16 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} + 8^2 = 8^2 \cdot 8 = 8^3. \end{aligned}$$

25. Каждый раз, когда мы ломаем один кусочек, получаем два меньших, т. е. общее число кусочков при этом увеличивается на один. Вначале был один кусок. Значит, всего нам придется ломать плитку 39 раз.

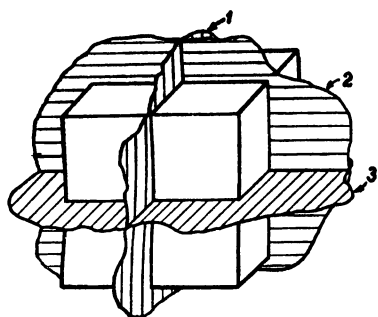


Рис. 25.

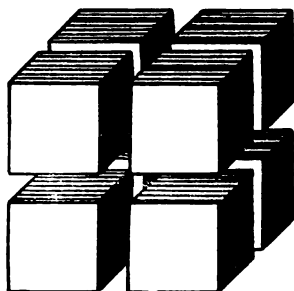
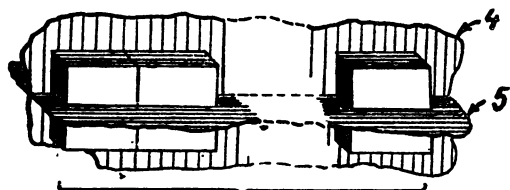


Рис. 26.



8 кубов $2 \times 2 \times 2$

Рис. 27.

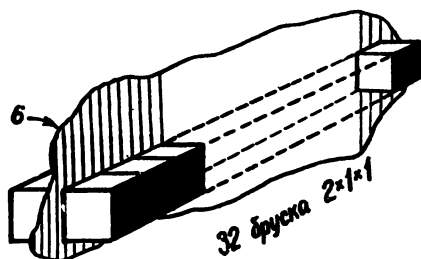


Рис. 28.

26. Из рис. 25—28 видно, что можно обойтись шестью разрезами. Пяти разрезов недостаточно, так как каждый разрез в лучшем случае удваивает число брусочков. Можно это доказать и по-другому. Рассмотрим кубик с ребром 10 см, который до разреза находился внутри куба. У него шесть граней. Для образования каждой грани потребовалось сделать разрез, но при одном разрезе образовывалась только одна грань, так как все грани лежат в разных плоскостях.

27. Положим на стол три спички и расположим монеты в ряд таким образом, чтобы перед первой спичкой лежали монеты первого школьника, между первой и второй — монеты второго, между второй и третьей — монеты третьего и, наконец, после третьей спички — монеты четвертого школьника. Возможно, что какой-то школьник не получит монет, тогда соответствующие спички будут расположены рядом. Монетами и спичками занято 28 мест и число способов дележа равно числу способов расстановки трех спичек на 28 местах или, что то же самое, числу способов выбрать 3 номера из номеров от 1 до 28. По следствию из основной леммы это число

$$C_{28}^3 = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3276.$$

28. Предположим, что имеется всего k марсианских слов длины n . Выпишем эти слова в строку. Подпишем под каждым словом наборы из n букв, получающиеся, если изменить в слове одну букву. Очевидно, что наборы из двух разных столбиков отличаются хотя бы одной буквой. Мы имеем всего k столбиков по $n + 1$ наборов в каждом и, стало быть, $k(n + 1)$ разных наборов. Но общее число наборов длины n из двух букв равно 2^n (см. стр. 35). Следовательно, $k(n + 1) \leq 2^n$.

29. Предположим сначала, что сдвинули с места только один маленький кубик, скажем, стоящий в углу (рис. 29). Сколькими способами можно его поставить на место? В точку A можно поместить любую из восьми вершин кубика. При этом его можно повернуть тремя различными способами. Всего получается 24 варианта. Столько же вариантов возвращения каждого из остальных кубиков. Комбинируя их между собой, получаем 24^{64} способов.

Чтобы прийти к общему случаю, мы должны еще рассмотреть все способы, которыми можно переставить кубики (не поворачивая их). Таких перестановок всего $64!$. А общее число способов сложить куб равно $24^{64} \cdot 64!$.

Подсчитаем теперь число способов, при которых получается куб, окрашенный снаружи в белый цвет. Среди 64 кубиков имеется:

- 1) 8, у которых окрашено 3 грани,
- 2) 24, у которых окрашено 2 грани,
- 3) 24, у которых окрашена 1 грань,
- 4) 8, у которых нет окрашенных граней.

Покажите сами, что для получения куба, окрашенного снаружи, кубики 1-го типа нужно располагать в вершинах куба, причем каждый из них можно повернуть тремя

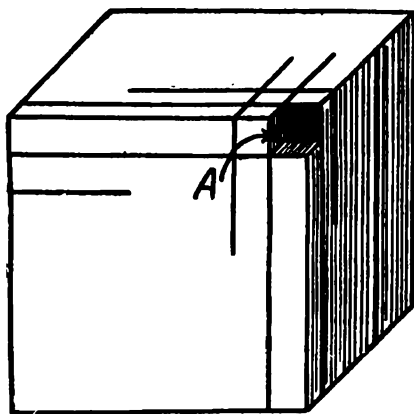


Рис. 29.

способами. Это дает $3^8 \cdot 8!$ возможностей. Аналогично, для кубиков 2-го типа имеется $2^{24} \cdot 24!$ нужных расположений, для кубиков 3-го типа $4^{24} \cdot 24!$ расположений и, наконец, для кубиков 4-го типа $24^8 \cdot 8!$ расположений. Комбинируя расположения кубиков всех четырех типов, получим, что всего существует

$$3^8 \cdot 8! \cdot 2^{24} \cdot 24! \cdot 4^{24} \cdot 24! \cdot 24^8 \cdot 8!$$

способов составить куб, окрашенный снаружи. Искомая

вероятность p получается как частное от деления этого числа на общее число способов составления куба, т. е. она равна

$$p = \frac{3^8 \cdot 8^{21} \cdot 24^8 \cdot (8!)^2 \cdot (24!)^2}{24^{64} \cdot 64!} = \frac{(8!)^2 \cdot (24!)^2}{3^{48} \cdot 8^{32} \cdot 64!}.$$

Оценить величину этого числа можно с помощью приближенных формул, известных в математическом анализе. Оказывается, что $p < 10^{-83}$. Для сравнения отметим, что по подсчетам физиков число атомов в видимой части Вселенной не превосходит 10^{68} .

30. Покажем, что мы всегда можем погасить все лампы. Можно считать, что вначале горело более 13 ламп (иначе бы мы включили 13 ламп из числа погашенных). Кроме того, можно по той же причине считать, что число погашенных ламп больше 6. Подберем 13 ламп так, чтобы среди них 7 горели и 6 были выключены. Сделаем переключение. В результате число горящих ламп уменьшится на единицу. Повторяя эту процедуру несколько раз, добьемся того, чтобы горело ровно 13 ламп и одним переключением погасим их.

Конечно, этот способ не самый экономный. Убедимся, что в задаче б) достаточно 9 переключений. (8 переключений недостаточно. Почему?) Можно действовать так: сначала выключить 13 ламп, затем выключить еще 7 (для чего переключить 10 горящих и 3 погашенные лампы). После двух этапов останется 91 горящих ламп, которые можно погасить семью переключениями.

31. Допустим, что нам удалось обойти наибольшую площадь, пройдя по улицам Сигмаграда 10 км. Докажем, что мы шли по прямоугольнику. Изобразим наш путь на карте города. Пусть AB — самая «верхняя» улица, на которой мы побывали, DC — самая «нижняя», AD — самая «левая» и BC — самая «правая». Чтобы пройти по нашему пути с улицы AB на DC и вернуться обратно, надо пройти по «вертикальным» улицам не меньше, чем $2 \cdot AD$, а для того, чтобы по этому пути пройти с AD на BC и вернуться в исходную точку, надо по «горизонтальным» улицам пройти путь не меньший, чем $2 \cdot AB$. Значит, наш путь имеет длину не меньшую, чем $2 \cdot AD + 2 \cdot AB$, что равно периметру прямоугольника $ABCD$. Если бы наш путь не был прямоугольным, то охватывающий его путь $ABCD$

заклучал бы в себе бóльшую площадь при том же или даже меньшем периметре (рис. 30).

Остается найти тот из «прямоугольных» путей, который ограничивает наибольшую площадь. Пусть a — длина большей стороны прямоугольника, b — меньшей. Представим a в виде: $a = (2,5 + x)$ км, тогда $b = (2,5 - x)$ км, а площадь прямоугольника

$$S = ab = (6,25 - x^2),$$

откуда видно, что площадь тем больше, чем меньше x .

Наименьшее возможное значение x в наших условиях равно 0,1 км, значит, наибольшая площадь, которую можно обойти, равна 6,24 км².

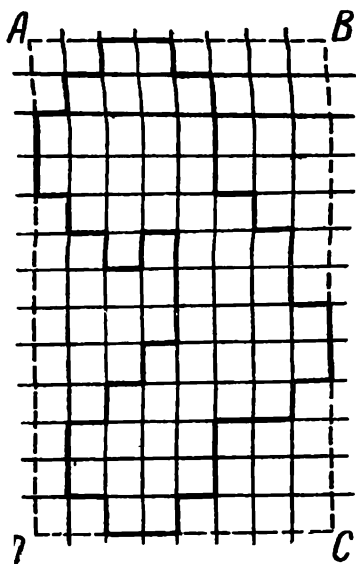


Рис. 30.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| к | с | з | ж | к | с | з | ж | к | с |
| с | з | ж | к | с | з | ж | к | с | з |
| з | ж | к | с | з | ж | к | с | з | ж |
| ж | к | с | з | ж | к | с | з | ж | к |
| к | с | з | ж | к | с | з | ж | к | с |
| с | з | ж | к | с | з | ж | к | с | з |
| з | ж | к | с | з | ж | к | с | з | ж |
| ж | к | с | з | ж | к | с | з | ж | к |
| к | с | з | ж | к | с | з | ж | к | с |
| с | з | ж | к | с | з | ж | к | с | з |

Рис. 31

32. Закрасим поля доски так, как это указано на рис. 31 (вместо цветов мы пишем буквы: к — красный, с — синий, з — зеленый, ж — желтый). Непосредственный подсчет показывает, что на доске имеется 24 желтых, 26 синих, 25 зеленых и 25 красных полей. Понятно, что каждый четырехклеточный корабль занимает ровно по одной клетке каждого цвета. Поэтому «обстреливая» последовательно желтые поля, мы не более чем за 24 «выстрела» попадем в корабль. Заметим, что на доске 10 × 10 можно расставить 24 четырехклеточных корабля (сделать это пре-

доставляем читателю). Отсюда следует, что числа выстрелов, меньшего 24, может не хватить.

33. Занумеруем клетки шахматной доски числами 1, 2, 3, как показано на рис. 32, а или б. (Рис. 32, б получается из рис. 32, а отражением относительно прямой АВ.)

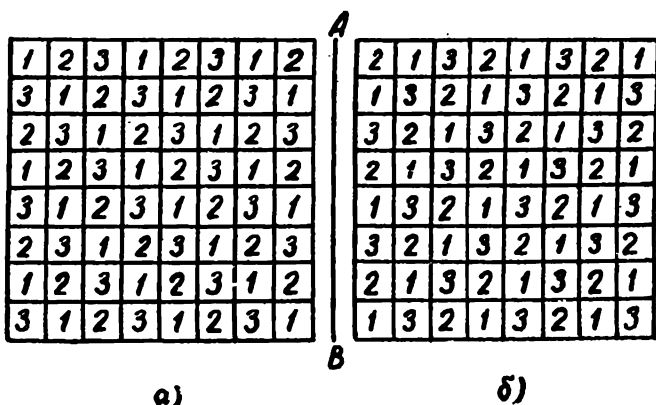


Рис. 32.

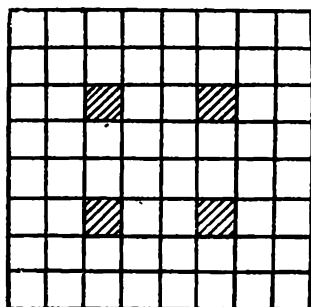


Рис. 33.

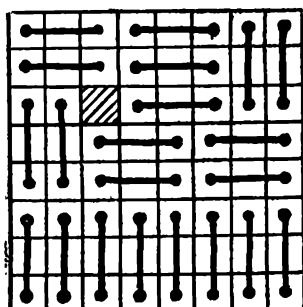


Рис. 34.

Заметим, что каждое «тримино» обязательно покрывает поля, занумерованные разными числами. Заметим также, что при обоих способах нумерации на доске написано 22 единицы, 21 двойка и 21 тройка. Поэтому свободным может

остаться лишь поле, на котором в обоих случаях стоит единица. Но таких полей лишь четыре. Они заштрихованы на рис. 33. Способ укладки тримино, при котором остается свободной верхняя левая из заштрихованных клеток, изображен на рис. 34. Расположение, при котором остаются свободными другие из заштрихованных клеток, можно получить, поворачивая это расположение на углы 90° , 180° и 270° .

34. Доказательство от противного. Допустим, что существует обход шахматной доски конем, удовлетворяющий условиям задачи. Рассмотрим квадрат 196×196 полей и окаймляющий его концентрично расположенный квадрат 200×200 полей, на 2500 белых полях которого стоят пешки. С каждого из $\frac{196^2}{2} = 19208$ черных полей внутреннего квадрата конь при обходе доски попадает на одно из $\frac{200^2}{2} - 2500 = 17500$ свободных белых полей окаймляющего квадрата. Так как $17500 < 19208$, то на некоторые белые поля конь попадает более чем один раз, что противоречит условию задачи.

35. На рис. 35 показана шахматная доска 3×4 , поля которой обозначены буквами А, Б, В и т. д. Одним ходом

| | | |
|---|---|---|
| А | Б | В |
| Г | Д | Е |
| Ж | З | И |
| К | Л | М |

Рис. 35.

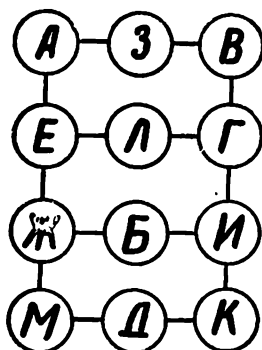


Рис. 36.

конь может попасть с А на З или Е, с З на А или В, с Е на А, Ж или Л и т. д. Это можно изобразить при помощи схемы (рис. 36). Каждому ходу коня с одного поля на дру-

гое соответствует некоторое передвижение по схеме из кружка, соответствующего первому полю (т. е. обозначенного той же буквой) в соседний кружок, соответствующий второму полю. Значит, чтобы найти все удовлетворяющие условию обходы доски, достаточно найти все такие обходы схемы, при которых мы из каждого кружка переходим в один из соседних кружков и посетим каждый кружок только один раз. Таким является, например, обход кружков *АЗВГЛЕЖБИКДМ*. Соответствующий ему обход доски, очевидно, удовлетворяет условию. Найти все подобные способы обхода кружков схемы нетрудно, они изображены условно на рис. 37. Ни при одном из этих восьми способов не удастся тринадцатым ходом попасть на

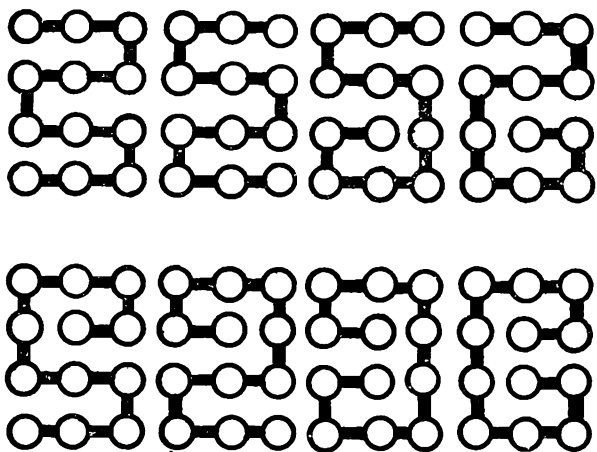


Рис. 37.

исходное поле. Другое доказательство последнего утверждения (для более общего случая — доски $4 \times n$) можно найти в книжке Е. Б. Дынкина и др. «Математические задачи» (решение задачи 112).

36. Удобнее рассматривать шахматную доску еще не склеенную, но при этом помнить, что ее противоположные края будут склеены, так что, например, диагональ $B'A'$ является продолжением диагонали AB (рис. 38). На рис. 39 на каждом поле написаны три цифры. Если для двух полей совпадают левые цифры, то эти поля находятся на одной

вертикали, если правые — на одной горизонтали, и если средние — на одной «диагонали». (На рис. 39 направление

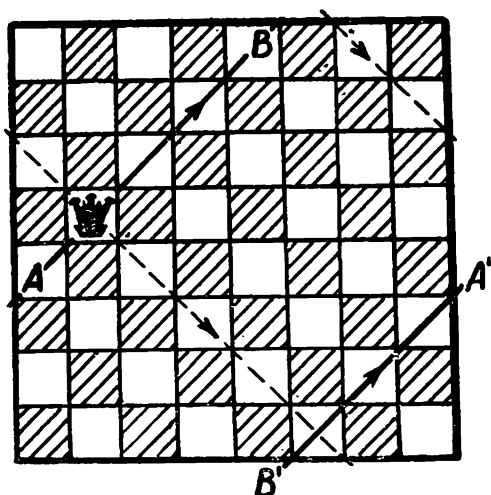


Рис. 38.

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 178 | 268 | 358 | 448 | 538 | 628 | 718 | 888 |
| 187 | 277 | 367 | 457 | 547 | 637 | 727 | 817 |
| 116 | 286 | 376 | 466 | 556 | 646 | 736 | 826 |
| 125 | 215 | 385 | 475 | 565 | 655 | 745 | 835 |
| 134 | 224 | 314 | 484 | 574 | 664 | 754 | 844 |
| 143 | 233 | 323 | 413 | 583 | 673 | 763 | 853 |
| 152 | 242 | 332 | 422 | 512 | 682 | 772 | 862 |
| 161 | 251 | 341 | 431 | 521 | 611 | 781 | 871 |

Рис. 39.

диагонали показано стрелкой.) Во всех трех случаях ферзи, помещенные на этих клетках, бьют друг друга.

Следовательно, если восемь ферзей не бьют друг друга, на восьми полях все левые цифры различны и, значит, образуют полный набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и то же верно для правых и для средних цифр. Поэтому сумма S всех 24 цифр, стоящих в этих восьми клетках, равна

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot 3 = 108.$$

Легко проверить, что сумма цифр в каждой клетке делится на 8. Следовательно, S также должно делиться на 8. Но 108 на 8 не делится.

Приведенное решение не меняется, если склеиваются только левый и правый края доски. Поэтому на цилиндрической доске также нельзя расставить восемь ферзей так, чтобы они не били друг друга.

37. Если слонов меньше десяти, то либо на белых, либо на черных полях стоят не более четырех из них. Четыре слона, защищающих друг друга, расположены либо на двух параллельных либо на двух перпендикулярных диагоналях. Пусть эти четыре слона стоят на параллельных белых диагоналях или на одной диагонали. Имется не менее пяти перпендикулярных белых диагоналей, содержащих по три клетки или больше. На каждой из них должен стоять хотя бы один слон.

Предположим теперь, что четыре слона защищают пару перпендикулярных белых диагоналей. Нетрудно видеть, что по одному из направлений имеется пять диагоналей, содержащих не менее четырех клеток. Но имеющиеся слоны бьют не более трех диагоналей каждого направления. Значит, на каждой из этих диагоналей должен стоять слон.

Укажем одно из расположений 10 слонов, удовлетворяющее условию: $b5, c3, d4, d5, d7, e4, e5, e7, f3, g5$.

38. Разобьем всех учеников класса на 13 групп: к первой группе причислим учеников, написавших диктант без ошибок, ко второй — тех, которые сделали одну ошибку, к третьей — две ошибки, и т. д., и наконец, к последней, тринадцатой, учеников, которые сделали 12 ошибок.

Если бы в каждой группе было не более двух учеников, то в классе насчитывалось бы не более 26 учеников. Так как в классе 30 учеников, то есть группа, в которой имеется хотя бы три ученика, а это и требовалось доказать.

39. Доказательство от противного. Допустим, что к некоторому моменту состязаний команды сыграли различное количество матчей. Присвоим каждой команде номер, равный количеству сыгранных этой командой матчей плюс один. Ясно, что номером может быть любое целое число от 1 до 30. Так как команд тоже 30 и никакие две команды не получают одинаковых номеров, то должна найтись команда, имеющая тридцатый номер, т. е. сыгравшая все 29 матчей, в том числе и матч с командой, имеющей первый номер. Но команда, получившая первый номер, к данному моменту не сыграла ни одного матча. Противоречие.

40. По условию в зале присутствовало $k \geq 5$ человек. Допустим сначала, что каждый зритель имеет среди сидящих в зале знакомых. Наибольшее число знакомств (для одного человека) не превосходит $k - 1$. Если $k \geq 2$, то среди k чисел, заключенных между 1 и $k - 1$, обязательно найдутся два совпадающих. Поэтому какие-нибудь двое зрителей имели одинаковое число знакомых.

Если бы в зале был человек, ни с кем не знакомый, то наибольшее число знакомств не превосходило бы $k - 2$, а при $k \geq 2$ среди k чисел, заключенных между 0 и $k - 2$, опять-таки есть два совпадающих.

41. Выпишем последовательно все наши двадцать чисел в порядке возрастания, начиная с наименьшего числа a и кончая наибольшим A . Вычтем из каждого числа предыдущее. Если среди разностей нет четырех одинаковых, то среди полученных девятнадцати чисел имеется не более чем по три единицы, двойки, тройки, четверки, пятерки и шестерки. Следовательно, хотя бы одно число не меньше семи. Выведите отсюда неравенство для разности

$$A - a \geq 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 7 = 70.$$

С другой стороны, разность двух положительных чисел, меньших 70, будет заведомо меньше 70.

Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

42. Предположим, что за первый день ученик решил a_1 задач, за первые два a_2 задач, за первые 77 дней (11 недель) a_{77} задач.

Рассмотрим числа

$$a_1, \quad a_2, \dots, a_{77};$$

$$a_1 + 20, \quad a_2 + 20, \dots, a_{77} + 20.$$

Всего имеется 154 числа. Заметим, что a_{77} не больше, чем $12 \cdot 11 = 132$. Значит, все выписанные числа не превосходят $132 + 20 = 152$, а поэтому среди них имеется два равных. Но числа первой строки все различны, а поэтому различны и числа второй строки. Следовательно, найдутся такие числа l и k , $l < k \leq 77$, что

$$a_k = a_l + 20 \text{ или } a_k - a_l = 20.$$

43. В центральном районе установлено не менее 5001 телефонных аппаратов. Пусть A — наименьший из их номеров. Вычтем A из оставшихся центральных номеров. Выпишем две группы чисел: первая группа состоит из номеров центральных телефонов, вторая — из получившихся разностей. Числа в каждой группе различны, а любое из них не превосходит 9999. Всего в двух группах не менее 10001 чисел, так что среди них найдутся два равных. Одно из этих чисел B стоит в первой группе и, значит, является номером центрального телефона, а другое стоит во второй группе, т. е. является разностью номера C некоторого центрального телефона и числа A .

Итак, $C - A = B$ или $C = B + A$, ч. т. д.

44. Условию задачи удовлетворяют карточки с номерами $k + 1, k + 2, \dots, 2k + 1$. Их число равно $k + 1$. Докажем, что большего числа карточек выбрать нельзя. Предположим противное, т. е. что можно выбрать $k + r$ карточек, удовлетворяющих условию задачи, где $r > 1$. Пусть n — наибольшее число, написанное на этих карточках. Рассмотрим разности между n и остальными числами на выбранных карточках. Этих разностей $k + r - 1$ и они должны быть написаны на оставшихся $2k + 1 - (k + r)$ карточках, т. е. должно выполняться неравенство

$$k + r - 1 \leq 2k + 1 - k - r = k - r + 1$$

или $r \leq 1$. Противоречие.

45. Рассмотрим первое число, его сумму со вторым, сумму первых трех чисел и т. д. Если одно из полу-

ченных чисел делится на k без остатка, то все доказано. Если же это не так, то, разделив эти числа на k , получим k остатков. Все остатки заключены между 1 и $k - 1$, поэтому среди них есть по меньшей мере два одинаковых. Разность соответствующих сумм делится на k . Но эта разность представляет собой сумму нескольких данных в задаче чисел, стоящих рядом.

46. Так как любые два из девяти последовательных чисел отличаются не более чем на 8, то их простыми общими делителями могут быть лишь 2, 3, 5 или 7. Среди двух последовательных чисел, делящихся на 3 (а также на 5 или на 7) — одно четное. Среди девяти последовательных чисел четыре или пять четные, а из нечетных на 3 делится не более двух, на 5 и на 7 — не более одного.

Если четных чисел четыре или среди нечетных лишь одно делится на 3, то по крайней мере одно число не делится на 2, 3, 5 и 7 и, следовательно, взаимно просто с остальными.

Если четных чисел пять (это должны быть числа первое, третье, пятое, седьмое и девятое), а среди нечетных два делятся на 3 (это должно быть второе и восьмое число), то четвертое или шестое число не делится на 5. Так как это число не делится также на 2 и на 3 и отличается от каждого из остальных не более чем на 5, то оно взаимно просто с остальными.

47. Сложив 10 сумм, мы получим

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \cdot 2 = 110.$$

Если бы последние цифры у десяти сумм были бы все разные, то при их сложении получилось бы число, оканчивающееся пятеркой.

Последующие задачи связаны с делимостью чисел. Приведем несколько теорем, которыми мы будем пользоваться. Доказательства этих теорем можно найти в книгах: Г. Н. Берман, Число и наука о нем, изд. 3-е, Физматгиз, 1960; Н. Н. Воробьев, Признаки делимости, Физматгиз, 1963; А. Нивен, Числа рациональные и иррациональные, М., «Мир», 1966.

а) Если число N представлено в виде

$$N = a \cdot 10^k + b \cdot 10^l + \dots + d \cdot 10^m,$$

то числа N и $a + b + \dots + d$ дают при делении на 3 и 9 одинаковые остатки. В частности,

б) число и сумма его цифр дают при делении на 9 одинаковые остатки;

в) если число $N = k^2$ имеет простой делитель p , то и k делится на p .

48. Из обеих частей равенства

$$ЛИК \times ЛИК = БУБЛИК$$

вычтем ЛИК. Получим

$$ЛИК \times (ЛИК - 1) = БУБ \times 1000.$$

Числа $ЛИК - 1$ и $ЛИК$ являются двумя последовательными натуральными числами, поэтому они взаимно просты и так как их произведение делится на $1000 = 5^3 \times 2^3$, то одно из них делится на 125, но не делится на 2, а другое делится на 8, но не делится на 5. Среди нечетных трехзначных чисел делятся на 125 только 125, 375, 625, 875. Среди соседних с ними чисел делятся на 8 только 376 и 624. Проверка показывает, что первое из этих чисел годится, а второе нет. Соответственно этому рассматриваемое равенство подстановкой цифр удастся превратить в тождество

$$376 \times 376 = 141376.$$

Шифровка

$$СУК \times СУК = БАРСУК$$

разгадывается аналогично.

О т в е т. $625 \times 625 = 390625$.

49. Из решения предыдущей задачи следует, что искомое число, обозначим его X , должно оканчиваться цифрами 376 или 625. Так же, как в предыдущей задаче, доказываем, что $X(X - 1)$ делится на $10000 = 5^4 \cdot 2^4$ и так как X и $X - 1$ взаимно просты, то одно из этих чисел нечетно и делится на 625, а другое не делится на 5, но делится на 16. Остается среди чисел вида

$$(2k + 1)625 - 1 \text{ и } (2k + 1)625 + 1,$$

где $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и 7 , найти числа, которые оканчиваются на 624 или 376 и делятся на 16. Такое число только одно, а именно 9376. Таким образом, $АЖУР = 9376$.

50. Напишем около отрезков нашей фигуры (рис. 40) различные простые числа. Затем внутри каждого кружка

запишем произведение простых чисел, стоящих около тех отрезков, которые сходятся в этом кружке. Легко видеть,

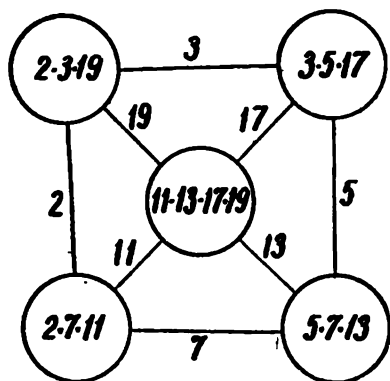


Рис. 40.

что полученное расположение чисел в кружках удовлетворяет условию задачи.

Точно так же эта задача решается и для двух других фигур.

51. Пусть N есть k -значное число. Заметим, что $N \cdot 10^{k-1} \leq N^2 \leq N \cdot 10^k$. Поэтому N^2 записывается либо $2k$ либо $2k - 1$ цифрами. В то же время всякое $2k$ -значное число, начинающееся с цифр, составляющих N , больше или равно $N \cdot 10^k$.

Поэтому если N удовлетворяет условию задачи, N^2 должно быть $(2k - 1)$ -значным. Следовательно,

$$N^2 = N \cdot 10^{k-1} + N_1,$$

причем число N_1 $(k - 1)$ -значно. Имеем $N(N - 10^{k-1}) = N_1$. Если $N - 10^{k-1} \neq 0$, то число $N(N - 10^{k-1})$ — по меньшей мере k -значно. Следовательно, $N - 10^{k-1} = 0$ и $N = 10^{k-1}$. Итак, условиям задачи удовлетворяют только числа вида $N = 10^{k-1}$.

52. Любое простое число m , отличное от 3, можно представить в виде $3n + 1$ или в виде $3n - 1$, где n — некоторое целое число. В первом случае можно записать

$$m^2 + 2 = 9n^2 + 6n + 3,$$

во втором случае $m^2 + 2 = 9n^2 - 6n + 3$.

Так как $m \geq 2$, то в любом случае число $m^2 + 2$ больше 3 и делится на 3, значит, $m^2 + 2$ составное. Следовательно, число $m^2 + 2$ может быть простым, только если $m = 3$. В этом случае $m^2 + 2 = 11$ — число простое, $m^3 + 2 = 29$ — тоже простое.

53. Разобьем все натуральные числа на группы по три числа в каждой:

(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), . . . , (34, 35, 36),

(37, 38, 39), (40, 41, 42), . . .

В первых 12 группах стоят 11 простых чисел, а в каждой из следующих групп не больше одного простого, так как последнее число в каждой группе делится на 3, а из двух других чисел одно четно. Поэтому при $n \geq 12$ число p_n находится в $(n + 1)$ -й группе или еще дальше. Но это и значит, что $p_n > 3n$.

54. Начнем со следующих замечаний.

1. Если полный квадрат оканчивается пятеркой, то предпоследняя его цифра — двойка.

2. При делении на 3 и на 4 полный квадрат дает в остатке 0 или 1.

3. Полный квадрат может оканчиваться лишь цифрами 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

Справедливость этих утверждений докажете сами.

Допустим, в противоречие с доказываемым, что число N — полный квадрат. Если N оканчивается пятеркой, то предпоследняя цифра числа N — двойка. Сумма цифр числа N в этом случае равна $999 \cdot 5 + 2$; при делении на 3 она дает в остатке 2. Но полный квадрат при делении на 3 не может давать в остатке 2. Если число N оканчивается цифрами 50, 51, 54 или 59, то при делении на 4 получится остаток, не равный 0 или 1, значит, и в этом случае число N не есть полный квадрат. Если, наконец, число N оканчивается на 56, то его сумма цифр равна $999 \cdot 5 + 6$, и, значит, число N делится на 3, но не делится на 9. Следовательно, и в этом случае число N не является полным квадратом (см. замечания на стр. 53). Противоречие.

55. Данное уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 14\sqrt{10}.$$

Докажем сначала, что числа \sqrt{x} и \sqrt{y} представляются в виде $\sqrt{x} = k\sqrt{10}$, $\sqrt{y} = m\sqrt{10}$, где k и m — неотрицательные целые числа. Проведем доказательство для \sqrt{y} . Имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= 14\sqrt{10} - \sqrt{y}, \\ x &= 10 \cdot 196 - 28\sqrt{10y} + y.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\sqrt{10y} = \frac{y + 1960 - x}{28}.$$

В правой части равенства стоит рациональное число. Квадратный корень из целого числа a является рациональным числом тогда и только тогда, когда число a является полным квадратом (докажите это, пользуясь теоремой в) на стр. 53). Поэтому $10y=b^2$. Но если квадрат целого числа делится на 10, то само это число делится на 10. Отсюда $b = 10m$ и, следовательно, $y = 10m^2$. Поэтому $\sqrt{y} = m\sqrt{10}$ и, аналогично, $\sqrt{x} = k\sqrt{10}$. Подставляя в исходное уравнение вместо \sqrt{x} и \sqrt{y} их выражения через k и m и сокращая на $\sqrt{10}$, получаем $k + m = 14$. Последнее уравнение в целых неотрицательных числах имеет 15 решений:

$$k_1 = 14, m_1 = 0; k_2 = 13, m_2 = 1; \dots; k_{15} = 0, m_{15} = 14.$$

Соответственно этому исходное уравнение имеет следующие 15 решений:

$$x_1 = 10 \cdot 14^2, y_1 = 0;$$

$$x_2 = 10 \cdot 13^2, y_2 = 10; \dots; x_{15} = 0, y_{15} = 10 \cdot 14^2.$$

56. Пусть a — делитель числа n , тогда и число $b = n/a$ является делителем числа n . Все делители числа n (кроме, быть может, \sqrt{n} , если \sqrt{n} — целое число) разобьем на пары, поставив в соответствие каждому делителю $a < \sqrt{n}$ делитель $b = n/a$, который, очевидно, больше n . Меньший из двух делителей пары будем называть «первым», больший — «вторым». Если число n не есть полный квадрат (\sqrt{n} — не целое), то число первых делителей меньше \sqrt{n} , а число всех делителей меньше $2\sqrt{n}$, ч.т.д. Если число n — полный квадрат (\sqrt{n} — целое), то число первых делителей не превосходит $\sqrt{n} - 1$, число первых и вторых не превосходит $2\sqrt{n} - 2$, а число всех делителей, считая \sqrt{n} , не больше чем $2\sqrt{n} - 1$, ч.т.д.

57. Не может. Для доказательства воспользуемся тем, что число и сумма его цифр при делении на 9 дают одинаковые остатки. Числа, записываемые цифрами 4, 6, X и Y , при делении на 9 дают один и тот же остаток r_1 , равный остатку от деления на 9 их суммы цифр $10 + X + Y$. Так как

$$46(10X + Y) = 45(10X + Y) + 9X + X + Y,$$

то $46 (10X + Y)$ при делении на 9 дает тот же остаток, что и $X + Y$. Обозначим этот остаток через r_2 . Очевидно, что $r_1 \neq r_2$.

58. Из признака делимости на 9, которым мы уже несколько раз пользовались, следует, что в последнем ряду стоят числа, которые при делении на 9 дают те же остатки, что и стоящие над ними числа первого ряда. Отсюда легко вытекает, что на первых 999 999 999 местах последнего ряда последовательно повторяются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а на последнем месте стоит 1, т. е. единиц в последнем ряду на одну больше чем пятерок.

59. Раз число делится на 11, то сумма цифр, стоящих на четных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на число, кратное 11. Кроме того, сумма всех цифр числа делится на 9. Но число 9, очевидно, нельзя представить в виде суммы двух чисел, разность которых кратна 11. Поэтому сумма цифр числа, которое делится на 99, должна быть не меньше 18.

З а м е ч а н и е. Сформулированный выше признак делимости на 11 можно найти, например, в книге Н. Н. Воробьева «Признаки делимости». Впрочем, вы можете доказать его сами. Приводим доказательство, ограничиваясь для простоты шестизначными числами. Имеем

$$\begin{aligned} \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} &= a_1 10^5 + a_2 10^4 + a_3 10^3 + a_4 10^2 + a_5 10 + \\ &+ a_6 = a_1 (99990 + 11 - 1) + a_2 (9999 + 1) + \\ &+ a_3 (990 + 11 - 1) + a_4 (99 + 1) + a_5 (11 - 1) + a_6 = \\ &= 11k + a_2 + a_4 + a_6 - a_1 - a_3 - a_5, \end{aligned}$$

где k — целое; отсюда все и получается.

60. Доказательство проведем методом математической индукции. Число 111 на 3 делится. Допустим, что наше утверждение справедливо при $n = k$, и докажем его для $n = k + 1$. Представим число $\underbrace{111 \dots 1}_{3^{k+1}}$ в виде

$$\underbrace{111 \dots 1}_{3^k} \times \underbrace{100 \dots 01}_{3^{k-1}} \underbrace{00 \dots 01}_{3^{k-1}}.$$

Первый сомножитель делится на 3^k по предположению индукции, второй сомножитель делится на 3, так как сумма его цифр равна 3, значит, произведение делится на 3^{k+1} .

61. Рассмотрим числа $1, 11, \dots, \underbrace{11 \dots 1}_l$. Если одно из

них делится на l , то все доказано. В противном случае, эти числа дают при делении на l остатки $1 = r_1, r_2, \dots, r_l$, каждый из которых равен либо 1, либо 2, ..., либо $l-1$. Так как остатков l , а возможных значений будет $l-1$, то найдутся два равных остатка, скажем, r_m и r_n ($m > n$). Но тогда число

$$\underbrace{11 \dots 1}_m - \underbrace{11 \dots 1}_n$$

делится на l . Очевидно, что

$$\underbrace{11 \dots 1}_m - \underbrace{11 \dots 1}_n = \underbrace{11 \dots 1}_{m-n} \underbrace{00 \dots 0}_n = \underbrace{11 \dots 1}_{m-n} \cdot 10^n.$$

Так как l не делится на 2 и на 5, то l не имеет общих делителей с 10^n . Значит, $\underbrace{11 \dots 1}_{m-n}$ делится на l , ч.т.д.

Заметим, что мы доказали даже больше, чем требовалось: найдется число, делящееся на l и записываемое не более чем l единицами.

62. Из замечания а), приведенного на стр. 52, следует, что любое число N , полученное выписыванием в некотором порядке натуральных чисел от 1 до 1967, имеет те же остатки при делении на 3 и 9, что и число

$$1 + 2 + \dots + 1967 = \frac{1967 \cdot 1968}{2}.$$

Но последнее число делится на 3 и не делится на 9. Значит, N не может быть не только кубом, но и любой другой степенью (квадратом, пятой степенью) натурального числа.

63. Пусть $f(7) = 11$, $f(11) = 13$. Тогда $f(11) - f(7)$ должно делиться на $11 - 7 = 4$. Действительно, если $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + gx + h$, то $f(11) - f(7) = a(11^n - 7^n) + b(11^{n-1} - 7^{n-1}) + \dots + g(11 - 7)$, и каждое из выражений в скобках делится на $11 - 7 = 4^*$). Но $13 - 11 = 2$ не делится на 4. Значит, такого многочлена с целыми коэффициентами не существует.

*) Воспользуйтесь тождеством

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

которое проверяется непосредственно.

64. Пусть $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Полагая $x = 0$, мы видим, что e делится на 5, и потому, если мы возьмем многочлен

$$Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx,$$

он также будет делиться на 5 при всех x . Далее,

$$Q(1) = a + b + c + d, \quad Q(-1) = a - b + c - d;$$

складывая и вычитая эти равенства, мы получим, что $a + c$ и $b + d$ также делятся на 5. Наконец,

$$Q(2) = 16a + 8b + 4c + 2d;$$

$$Q(-2) = 16a - 8b + 4c - 2d,$$

т. е. $4a + c$ и $4b + d$ также делятся на 5, откуда уже ясно, что a, b, c и d делятся на 5, что и требовалось доказать. Если степень $P(x)$ равна 5, то уже существует многочлен, делящийся на 5 при всех x , не удовлетворяющий условию задачи, именно, $x^5 - x$.

65. Рассуждения предыдущей задачи проходят почти без изменения и в этом случае. Действительно, пусть

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Подставляя $x = 0, \pm 1, \pm 2$, получаем, что числа

$$e, a + b + c + d + e, a - b + c - d + e,$$

$$16a + 8b + 4c + 2d + e, 16a - 8b + 4c - 2d + e$$

целые. Складывая и вычитая последовательно второе и третье, а затем четвертое и пятое выражения, получаем, что

$$e, 2(a + c), 2(b + d), 32a + 8c, 16b + 4d$$

целые числа. Но тогда число

$$24a = (32a + 8c) - 4 \cdot 2(a + c)$$

также целое. После этого уже совсем легко проверяется, что и $24b, 24c, 24d$ — целые. Задача решена. Следует отметить, что этот метод трудно применить к уравнениям более высоких степеней.

66а. При целом $x \geq n$ $Q_n(x) = C_x^n$ число целое (см. следствие 3 из комбинаторной леммы, стр. 36). При $x = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $Q_n(x) = 0$. Наконец, если x — целое отрицательное число, то $Q_n(x) = (-1)^n C_{n-x-1}^n$ опять-таки целое.

Возможно и другое решение задачи, использующее метод математической индукции (индукция по x).

б. Утверждение задачи докажем индукцией по n .

При $n = 1$ оно очевидно. Пусть теорема справедлива при $n \leq k$ и пусть $P(x)$ — многочлен степени $k + 1$. Тогда, как легко проверить,

$$P(x) = a_0(k+1)! Q_{k+1}(x) + R(x),$$

где $R(x)$ — многочлен степени, не превосходящей k . По предположению индукции $R(x)$ можно выразить через многочлены $Q_i(x)$ при $i \leq k$, как указано в условии. Подставив это выражение в последнее равенство, получим требуемое представление $P(x)$.

в. Пусть $P(x)$ принимает целые значения во всех целых точках. Представим $P(x)$ через $Q_i(x)$ при $i \leq n$:

$$P(x) = b_0 \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!} + \\ + b_1 \frac{x(x-1)\dots(x-n+2)}{(n-1)!} + \dots + b_{n-2} \frac{x(x-1)}{2!} + b_{n-1} \frac{x}{1} + b_n.$$

Подставляя $x = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$, получим

$$P(0) = b_n; P(1) = b_{n-1} + b_n; P(2) = b_{n-2} + b_{n-1} + b_n; \dots;$$

$$P(n-1) = b_1 + b_2 + \dots + b_n; P(n) = b_0 + b_1 + \dots + b_n.$$

Так как $P(0), P(1), \dots, P(n)$ — целые числа, то, рассматривая эти соотношения последовательно с самого начала, убеждаемся, что $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ — тоже целые. Но тогда

$$n! P(x) = b_0 x(x-1)\dots(x-n+1) + \\ + nb_1 x(x-1)\dots(x-n+2) + \dots + n(n-1)\dots 3b_{n-2} x(x-1) + \\ + n(n-1)\dots 3 \cdot 2b_{n-1} x + nb_n.$$

Отсюда видно, что все коэффициенты многочлена $n! P(x)$ — целые, ч.т.д.

67. Для решения задачи достаточно проверить, что числа вида $l^3 - 3$ ни при каком целом l не делятся на 1967. Заметим, что $1967 = 7 \cdot 281$. Докажем, что числа вида $l^3 - 3$ не делятся даже на 7. Любое число l можно представить

в виде $l = 7m + r$, где $r = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Тогда
 $l^3 - 3 = 7M + r^3 - 3$.

Значения $r^3 - 3$ указаны в следующей табличке:

| r | 0 | 1 | 2 | 3 | -1 | -2 | -3 |
|-----------|----|----|---|----|----|-----|-----|
| $r^3 - 3$ | -3 | -2 | 5 | 24 | -4 | -11 | -30 |

Мы видим, что ни одно из чисел нижней строки не делится на 7.

68. В этой последовательности после каждых двух нечетных чисел идет одно четное. Рассмотрим пять последовательных чисел a, b, c, d, e , причем числа b и e — четные, а числа a, c, d — нечетные. Имеем

$e = ad + 1 = (ab + 1)(bc + 1) + 1 = ab^2c + b(a + c) + 2$. Число ab^2c делится на 4, так как b — четное число. Ясно, что $b(a + c)$ тоже делится на 4. Значит, e при делении на 4 дает в остатке 2. Итак, любое четное число в нашей последовательности не делится на 4, ч.т.д.

69. Положим $5^n \sin nx = p_n$, $5^n \cos nx = q_n$. По условию $p_1 = 3$ и, значит, $q_1 = \pm 4$. Из формул сложения:

$$\begin{aligned}\sin(n+1)x &= \sin x \cos nx + \cos x \sin nx, \\ \cos(n+1)x &= \cos x \cos nx - \sin x \sin nx\end{aligned}$$

вытекает, что

$$p_{n+1} = \pm 4p_n + 3q_n; \quad q_{n+1} = -3p_n \pm 4q_n \quad (*)$$

или

$$p_{n+1} \pm p_n - 3q_n = \pm 5p_n; \quad q_{n+1} \pm q_n + 3p_n = \pm 5q_n. (**)$$

Отсюда ясно, что при любом n числа p_n и q_n — целые.

Обозначим остаток от деления p_n на 5 через r_n , остаток от деления q_n на 5 через s_n и заметим, что в силу формул (**) числа $r_{n+1} \pm r_n - 3s_n$, $s_{n+1} \pm s_n + 3r_n$ делятся на 5. Учитывая, что $r_1 = p_1 = 3$, а $s_1 = q_1 = \pm 4$, из этих формул найдем сначала r_2 и s_2 , затем r_3 и s_3 и т. д. Получается, что $r_5 = r_1$, $s_5 = s_1$ и далее

$$r_5 = r_9 = r_{13} = r_{17} = r_{21} = r_{25} = 3.$$

Итак, p_{25} дает при делении на 5 остаток 3, и, значит, не делится на 5, ч.т.д.

70. Заметим, что если номер \overline{abcdef} — счастливый, т. е. $a + b + c = d + e + f$, то и номер 999 999 — \overline{abcdef} тоже счастливый, так как сумма первых трех его цифр $27 - (a + b + c)$ равна сумме трех последних $27 - (d + e + f)$. Все счастливые номера, за исключением номера 999 999, разобьем на пары: каждый счастливый номер $a < 500\,000$ объединим в пару со счастливым номером $999\,999 - a$, который, очевидно, больше чем 500 000. Сумма номеров, принадлежащих одной паре, равна $999\,999 = 999 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ и, следовательно, делится на 13. Один номер, а именно 999 999, остался без пары, но он также делится на 13. Поэтому сумма всех счастливых номеров делится на 13.

Одновременно мы доказали, что сумма всех счастливых номеров делится на 7, 11 и 999.

71. Согласно условию удвоенная сумма денег, вложенных каждым мальчиком, не превосходит суммы, вложенной двумя остальными. Если бы один из мальчиков дал больше двух рублей, то двое остальных дали бы меньше четырех, т. е. меньше удвоенной суммы денег первого. Итак, каждый дал не больше двух рублей. Так как мяч стоил 6 рублей, то каждый дал 2 рубля.

72. Расположим грибников по числу найденных грибов, так что первый набрал больше всех грибов, а седьмой меньше всех. Если четвертый набрал не меньше 15 грибов, то первые трое собрали не меньше чем

$$16 + 17 + 18 = 51 \text{ гриб.}$$

Если же четвертый набрал 14 грибов или меньше, то четвертый, пятый, шестой и седьмой набрали вместе не больше чем

$$14 + 13 + 12 + 11 = 50 \text{ грибов,}$$

а значит, первые трое не менее 50 грибов.

73. Сложив все 10 сумм, получим 72. Так как каждое из пяти исходных чисел входит в четыре суммы, то сумма искомым чисел равна $72 : 4 = 18$. Сумма наименьших двух, очевидно, равна 0, а наибольших 15. Значит, третье по величине число равно $18 - 0 - 15 = 3$. В ряду сумм второе место занято, очевидно, суммой первого и третьего.

Поэтому эта сумма равна 2, а наименьшее число равно $2 - 3 = -1$. Ясно, что второе число равно $0 - (-1) = 1$. Аналогично находим, что наибольшие два числа равны 5 и 10.

Во втором случае сумма десяти данных чисел равна 158. Сумма искоемых чисел должна равняться $158 : 4$, что невозможно, так как искомые числа — целые. Значит, ответ на второй вопрос задачи отрицателен.

74. Выберем 5 студентов, по одному с каждого курса. Все они придумали разное число задач. Поэтому общее число задач, предложенных ими, не меньше, чем $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Остальные 25 студентов придумали не более чем $40 - 15 = 25$ задач. Ясно, что каждый из них придумал по одной задаче, и следовательно, всего 26 человек придумали по одной задаче.

75. Рассмотрим произвольное шестизначное число. Обозначим цифры этого числа (в порядке убывания) через

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6;$$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6.$$

Докажем, что число $\overline{a_1 a_3 a_5 a_2 a_4 a_6}$ удовлетворяет условию задачи. Действительно, разность между суммой первых его трех цифр и суммой последних трех можно записать в виде

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6),$$

откуда видно, что эта разность неотрицательна и, кроме того,

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) \leq (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + (a_4 - a_5) + (a_5 - a_6) = a_1 - a_6 \leq 9,$$

что и требовалось доказать.

76. Пусть, например, по окружности стоят по часовой стрелке числа a, b, c . Запишем эти числа дважды в строку: $abcabc$, а затем выпишем шесть последовательных сумм

$$\begin{aligned} s_1 &= a, \\ s_2 &= a + b, \\ s_3 &= a + b + c, \\ s_4 &= a + b + c + a, \\ s_5 &= a + b + c + a + b, \\ s_6 &= a + b + c + a + b + c. \end{aligned}$$

По условию, $a + b + c$ положительно. Поэтому s_1 меньше s_4 , s_2 меньше s_5 , s_3 меньше s_6 и среди чисел s_1, s_2, s_3 есть число, которое меньше, чем все последующие выписанные нами суммы. Пусть это будет, например, s_2 . Тогда

$$\begin{aligned} 0 < s_3 - s_2 &= c, \\ 0 < s_4 - s_2 &= c + a, \\ 0 < s_5 - s_2 &= c + a + b, \end{aligned}$$

и условию задачи удовлетворяет число c . Вообще, если s_k меньше, чем все последующие суммы, то искомым числом является $(k + 1)$ -е среди чисел a, b, c, a .

77. Рядом с каждой машиной напишем на шоссе число, которое равно разности между количеством метров, которое может пройти эта машина, не заправляясь, и расстоянием до соседней (по часовой стрелке) машины. Сумма всех этих чисел положительна. По задаче 76, найдется такое число, что оно само, сумма его со следующим, сумма с двумя следующими и т. д. положительны. Выбрав автомашину, рядом с которой стоит это число, гонщик, очевидно, справится с заданием.

78. Очевидно, что если $n \geq k$, то и $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[k]{k}$, и потому $\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[k]{k}} \geq 1$. Отсюда $\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[1]{1}} + \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[2]{2}} + \dots + \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n-1]{n-1}} + \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}} \geq n$ и деля обе части на $\sqrt[n]{n}$, получаем искомое неравенство.

79. Воспользуйтесь тем, что $x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$, причем равенство имеет место лишь при $x = 1$. Сложите уравнения

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} &= 3 \end{aligned}$$

и выведите, что $n \leq 3$. После этого легко показать, что при $n = 3$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1,$$

при $n = 2$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

(получение этого ответа связано с решением квадратного уравнения). При $n = 1$ система несовместна.

80. Всегда. Для доказательства занумеруем страны на окрашенной стороне стекла цифрами 1, 2, 3, 4, 5, а на неокрашенной — цифрами 6, 7, 8, 9, 10. Обозначим через s_m^n площадь участков стекла, на окрашенной стороне которых изображена территория m -й страны ($1 \leq m \leq 5$), а на неокрашенной — территория n -й страны ($6 \leq n \leq 10$). Если таких участков нет, то $s_m^n = 0$. Рассмотрим таблицу

| | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| s_1^6 | s_2^7 | s_3^8 | s_4^9 | s_5^{10} |
| s_1^7 | s_2^8 | s_3^9 | s_4^{10} | s_5^6 |
| s_1^8 | s_2^9 | s_3^{10} | s_4^6 | s_5^7 |
| s_1^9 | s_2^{10} | s_3^6 | s_4^7 | s_5^8 |
| s_1^{10} | s_2^6 | s_3^7 | s_4^8 | s_5^9 |

Сумма всех чисел таблицы равна 1, поэтому найдется строка, сумма чисел в которой не меньше $1/5$. Не ограничивая общности, можно считать, что это — первая строка (это всегда можно добиться, перенумеровывая страны). Окрасим $(m+5)$ -ю страну в тот же цвет, что и m -ю ($1 \leq m \leq 5$). Тогда общая площадь участков стекла, окрашенных с обеих сторон в один цвет, равна $s_1^6 + s_2^7 + s_3^8 + s_4^9 + s_5^{10}$, т. е. сумме чисел первой строки, и следовательно, не меньше $1/5$.

81. Расположим медали в ряд и занумеруем их цифрами от 1 до 100. Рассмотрим две группы медалей — медали с нечетными номерами и медали с четными номерами. Пусть вес первой группы равен A , а вес второй равен B . Очевидно, что $A + B = 1000$ г. Предположим, что $A \leq 500$ г (случай $B \leq 500$ г рассматривается аналогично). Если 500 г — $A < 10$ г, то все доказано. Пусть $A < 490$ г. Заменим в первой группе медаль № 1 на медаль № 2. При этом, по условию задачи, вес первой группы изменится не более чем на 20 г. В полученной группе заменим медаль № 3 на медаль № 4 и т. д. Через 50 шагов (после замены медали № 99 на медаль № 100) мы придем к группе, составленной из всех медалей с четными номерами, вес которой уже больше чем 510 г. Значит, на одном из промежуточных шагов вес первой группы переходит рубеж 500 г. Так как величина этого шага

не превышает 20 г, то перед этим шагом или после него (рис. 41) вес первой группы отличается от 500 не более чем на 10 г. В этот момент веса первой и второй групп отличались не более чем на 20 г.

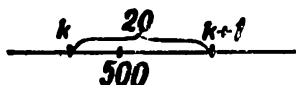


Рис. 41.

82а. Векторы, изображающие комплексные числа z и $1/z$, образуют с осью Ox равные и симметрично расположенные углы. (Чтобы это проверить, достаточно записать z и $1/z$ в тригонометрической форме.) Далее, если векторы, изображающие комплексные числа, лежат по одну сторону от прямой, проходящей через 0, то их сумма не равна 0 и лежит по ту же сторону от этой прямой (поскольку комплексные числа можно складывать по правилу параллелограмма).

Допустим, что 0 лежит вне выпуклого многоугольника с вершинами c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 (рис. 42). Тогда через 0 можно провести прямую, не пересекающую многоугольник, а векторы c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 лежат по одну сторону от этой прямой. Векторы $\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_3}, \frac{1}{c_4}$ и $\frac{1}{c_5}$ будут также лежать по одну сторону от некоторой прямой и, значит, их сумма не равна 0, что противоречит условию задачи. Итак, 0 лежит внутри многоугольника с вершинами c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 .

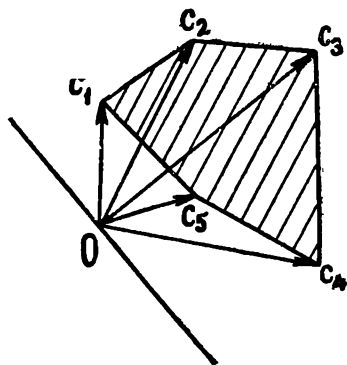


Рис. 42.

6. Применить рассуждения задачи 82а к числам (рис. 43)

$$\omega_1 = c_1 - z, \omega_2 = c_2 - z, \dots, \omega_n = c_n - z.$$

83. Функция $\cos x + \cos \alpha x$ при $x = 0$ равна 2. Допустим, что она имеет период $T > 0$. Тогда $\cos T + \cos \alpha T = 2$, а это возможно лишь в том случае, если $\cos T = \cos \alpha T = 1$. Из этих равенств следует, что $T = 2k\pi$ и $\alpha T = 2m\pi$, где k и m — некоторые целые числа. Но это означает, что число $\alpha = m/k$ — рациональное. Полученное

противоречие доказывает, что функция $\cos x + \cos \alpha x$ непериодическая.

84. Обозначим для краткости длины участков AB , BC , CD и DE через a , b , c , d . Не ограничивая общности, можно предположить, что $a > b > c > d$. Пусть путешественник на участке AB пользовался самолетом, скорость которого v_1 , на BC — v_2 , на CD — v_3 и, наконец, на DE — v_4 . Докажем, что время путешествия наименьшее, если $v_1 > v_2 > v_3 > v_4$. С этой целью докажем, что если хотя бы одно из неравенств этой цепочки не выполняется, то время путешествия не является наименьшим возможным. Пусть, например, $v_2 < v_4$, тогда время путешествия больше того

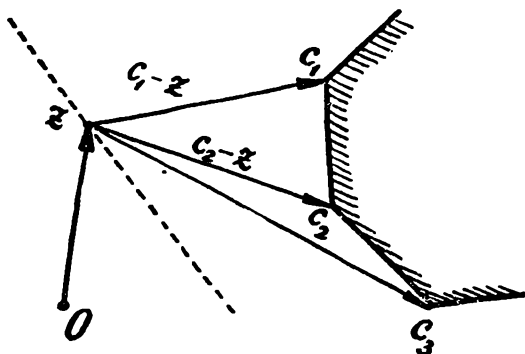


Рис. 43.

времени, которое было бы затрачено, если бы путешественник на участке BC пользовался самолетом со скоростью v_4 , а на участке DE самолетом со скоростью v_2 . В самом деле, это утверждение означает, что $\frac{b}{v_2} + \frac{d}{v_4} > \frac{b}{v_4} + \frac{d}{v_2}$; отсюда получается равносильное неравенство:

$$b\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_4}\right) > d\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_4}\right).$$

Последнее неравенство справедливо, так как по предположению $b > d$, а $v_2 < v_4$.

85. Назовем «молодыми» бактерии, возраст которых не превосходит полчаса, а «старыми» — бактерии, прожившие свыше полчаса. Примем за единицу времени полчаса. Обозначим число бактерий к моменту n через u_n . В момент $n - 1$ рождается u_{n-1} бактерий, значит, к моменту n имеется u_{n-1} молодых бактерий, каждая из которых порождает одну новую бактерию, и $u_n - u_{n-1}$ старых бактерий, каждая из которых порождает одну новую бактерию, а сама умирает. Следовательно, к моменту $n + 1$ число бактерий составляет $u_{n-1} + u_{n-1} + u_n - u_{n-1}$, т. е.

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}. \quad (*)$$

При этом $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Искомое число бактерий равно u_{13} . Непосредственный подсчет по рекуррентной формуле (*) показывает, что $u_{13} = 377$.

Последовательность u_n совпадает с рядом Фибоначчи (см. Н. Н. Воробьев, Числа Фибоначчи, изд. 3-е, «Наука», 1969).

86. Количество и положение частиц в моменты $t = 0, 1, 2, 3$ и 4 сек изображены на рис. 44. Докажем, что через

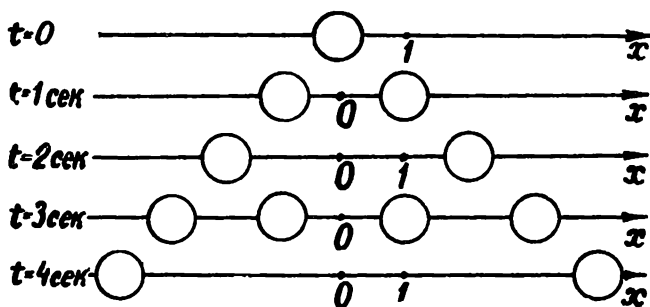


Рис. 44.

$2^n - 1$ сек будет 2^n частиц, расположенных в ряд на расстоянии 2 друг от друга, причем крайние частицы будут находиться на расстоянии $2^n - 1$ от начального положения, а через 2^n сек останутся две частицы на расстоянии 2^n от начального положения. Справедливость этого утверждения при $n = 1$ и $n = 2$ ясна из рис. 44. Пусть это утверждение уже доказано при $n = k$. Докажем его для $n = k + 1$.

Согласно предположению индукции, в момент $t = 2^k$ останутся две частицы на расстоянии 2^k от начального положения. Потом в течение времени $2^k - 1$ сек «потомство» первой частицы никак не будет взаимодействовать с «потомством» второй и поэтому, как следует из предположения индукции, в момент $t = 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ сек образуется $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ частиц, расположенных в ряд на расстоянии 2 друг от друга. Ясно, что в момент $t + 1 = 2^{k+1}$ останутся две частицы на расстоянии 2^{k+1} от начального положения.

При $k = 7$ получаем отсюда, что через 128 сек будут две частицы на расстоянии 128 от начального положения, а число частиц через 129 сек равно 4.

87. Перепишем данные равенства так:

$$\begin{aligned} -k &= 1966 - klmn, \\ -l &= 966 - klmn, \\ -m &= 66 - klmn, \\ -n &= 6 - klmn. \end{aligned}$$

Перемножая их и обозначая $klmn = x$, получим

$$x = (1966 - x)(966 - x)(66 - x)(6 - x). \quad (*)$$

Если бы исходная система имела решение в целых числах, то и уравнение (*) имело бы целый корень (положительный или отрицательный). Покажем, что это невозможно. В самом деле, если бы целый корень x существовал, то $6 - x$ был бы делителем x . Покажите сами, что это возможно лишь при $x = 5, 7, 8, 4, 9, 3, 0$. Но, очевидно, перечисленные значения x не удовлетворяют уравнению (*).

88. Предположим, что требуемые x, y, z, u существуют. Складывая равенства

$$\begin{aligned} x^4 - 17 &= xyzu, & z^4 + 19 &= xyzu, \\ y^4 - 7 &= xyzu, & u^4 + 5 &= xyzu, \end{aligned}$$

получим

$$x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = 4xyzu.$$

Но

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 + u^4 - 4xyzu &= x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + z^4 + \\ &+ u^4 + 2x^2y^2 - 2z^2u^2 + 2z^2u^2 - 4xyzu = \\ &= (x^2 - y^2)^2 + (z^2 - u^2)^2 + 2(xy - zu)^2. \end{aligned}$$

В нашем случае это выражение равно нулю и, значит, $x^2 = y^2$, $z^2 = u^2$, $xy = zu$. Но если $x^2 = y^2$, то из равенства $x^4 - 17 = y^4 - 7$ следует, что $-17 = -7$, и мы пришли к противоречию.

89. Легко заметить, что одним из решений данного уравнения является $x = 2$. Докажем, что других решений нет. Запишем данное уравнение в виде

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1.$$

Если $x < 2$, то $\left(\frac{5}{13}\right)^x > \left(\frac{5}{13}\right)^2$, $\left(\frac{12}{13}\right)^x > \left(\frac{12}{13}\right)^2$ и следовательно, $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x > \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2$. Аналогично, если $x > 2$, то $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x < 1$.

90. Положим

$$z = 1 - 1967x^2.$$

Тогда исходное уравнение сводится к системе

$$\begin{cases} x = 1 - 1967z^2, \\ z = 1 - 1967x^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$x - z = 1967(x^2 - z^2).$$

Отсюда либо $z = x$, либо $z = \frac{1}{1967} - x$. В первом случае

$$x = 1 - 1967x^2,$$

а во втором

$$\frac{1}{1967} - x = 1 - 1967x^2.$$

Решая эти уравнения, мы найдем четыре корня. Легко видеть, что все они удовлетворяют данному уравнению.

91. Положим $A(0) = b$. Из первого равенства получается

$$A(0 + 0) = A(0) + A(0) = 2b,$$

откуда $b = A(0) = 0$. Пусть, далее, $A(1) = a$. Тогда

$$a = A(1) = A(1 \cdot 1) = A(1) \cdot A(1) = a^2,$$

92. 1-й способ. Попробуем отыскать все разбиения чисел от 1 до 9 на такие две группы, чтобы ни в одной группе не было трех чисел, одно из которых есть среднее арифметическое двух других. Изобразим белыми кружками числа группы, содержащей 1, и черными кружками числа второй группы. Числу 2 может соответствовать как белый, так и черный кружок, что изображено на рис. 45. К цепочке из

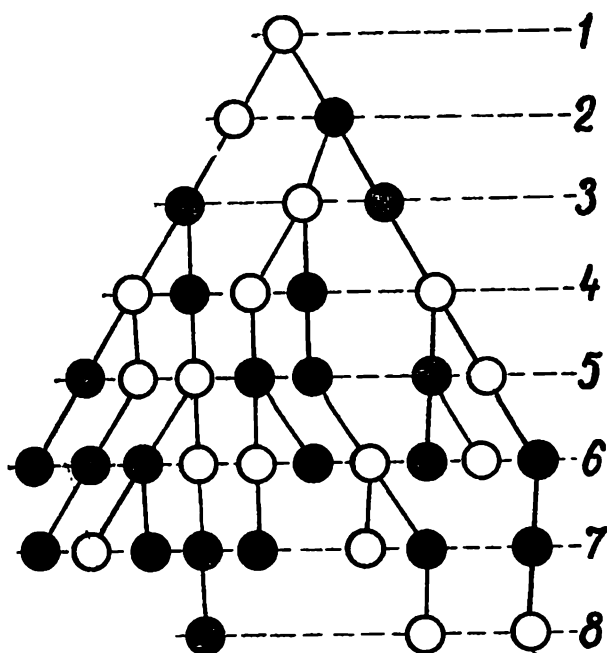


Рис. 45.

двух белых кружков можно пририсовать только черный (иначе в белую группу войдут числа 1, 2, 3), а цепочку $\bigcirc-\bullet$ можно продолжить двумя способами. Продолжая это построение, приходим к схеме, изображенной на рис. 45. Из этой схемы видно, что ни одну из цепочек нельзя продолжить требуемым образом. Следовательно, утверждение задачи справедливо даже тогда, когда на две группы разбиваются не все натуральные числа, а лишь первые девять.

2-й способ. Если три числа 5, 7, 9, оказались в одной группе, то все доказано.

Пусть они находятся в разных группах. Будем ту группу, в которой оказались два из этих чисел, называть первой, а сами эти числа обозначим a и b . Очевидно, $2a - b > 0$ и $2b - a > 0$. Если хотя бы одно из чисел $2a - b$, $2b - a$ окажется в первой группе, то утверждение справедливо, так как

$$\frac{a + (2b - a)}{2} = b \text{ и } \frac{b + (2a - b)}{2} = a.$$

Предположим теперь, что числа $2a - b$ и $2b - a$ оба находятся во второй группе.

Если их среднее арифметическое, равное $(a + b)/2$ (оно является целым числом), находится во второй группе, то все доказано. Если же число $(a + b)/2$ окажется в первой группе, то утверждение также справедливо, так как в первой группе находятся числа a и b .

93. Построить такое разбиение можно, например, так. Полные квадраты $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$ разбивают все натуральные числа на группы чисел (рис. 46). Отнесем к первому



Рис. 46.

множеству все числа, принадлежащие нечетным группам, а ко второму множеству все числа из четных групп (при этом мы относим сами квадраты к первому множеству). Если d — разность арифметической прогрессии, то в группу подряд стоящих натуральных чисел «длины» большей d обязательно попадает хотя бы один член арифметической прогрессии. Но, каково бы ни было d , такие группы имеются в первом и во втором множествах, так как расстояния между соседними квадратами n^2 и $(n + 1)^2$ неограниченно возрастают с увеличением n .

94. Пусть первый член прогрессии $a_1 = a$, а разность d . Подберем такое натуральное n , чтобы $a + 10d < 10^n$. Пусть a_k и a_{k+1} два соседних члена арифметической прогрессии, для которых выполняются неравенства $a_k < 10^n$,

$a_{k+1} > 10^n$. Очевидно, что

$$10^n \leq a_{k+1} = a_k + d \leq 10^n - 1 + 10^{n-1},$$

откуда видно, что число a_{k+1} начинается цифрами 10.

Точно так же можно доказать, что в этой прогрессии найдется член, начинающийся любым наперед заданным набором цифр, скажем, 257 или 1968.

95. Пусть $\overbrace{abc\dots f}_k$ — данный в условии задачи набор цифр. Рассмотрим два числа:

$$N_1 = \overbrace{abc\dots f}_k \overbrace{00\dots 0}_{3k} \quad \text{и} \quad N_2 = \overbrace{abc\dots f}_k \overbrace{99\dots 9}_{3k}.$$

Пусть n^2 — наибольший полный квадрат, не превосходящий N_1 . Заметим, что $n < 10^{2k}$. Тогда

$$\begin{aligned} N_1 &< (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < \\ &< N_1 + 2 \cdot 10^{2k} + 1 < N_1 + 10^{3k} - 1 = N_2. \end{aligned}$$

Поэтому число $(n+1)^2$ удовлетворяет условиям задачи.

Подумайте сами, справедливо ли аналогичное утверждение для кубов, четвертых степеней и т. д.

96. Для решения нам потребуется двоичная и троичная системы счисления. Всякое натуральное число n можно записать, и притом единственным образом, в виде

$$n = 2^k + c_1 2^{k-1} + c_2 2^{k-2} + \dots + c_k,$$

где c_i принимают значения 0 или 1. Числа 1, c_1, c_2, \dots называются цифрами двоичного разложения. Условимся писать

$$(n)_2 = \overline{1c_1c_2\dots c_k}.$$

Примеры. $(8)_2 = 1000$, $(17)_2 = 10001$ и т. п.

Наряду с этим для каждого натурального числа n существует, и притом только одно, представление в виде

$$n = b_0 3^l + b_1 3^{l-1} + \dots + b_l,$$

где $b_0 = 1$ или 2, b_i при $i \geq 1$ могут принимать одно из трех значений 0, 1 или 2. Будем сокращенно писать

$$(n)_3 = \overline{b_0 b_1 \dots b_l}$$

и называть b_0, b_1, \dots, b_l — цифрами троичного разложения.

Примеры.

$$(5)_3 = 12, \quad (26)_3 = 222, \quad (3^k - 1)_3 = \underbrace{22 \dots 2}_k \text{ раз}.$$

Перейдем к решению задачи. Любое число m от 0 до $3^k - 1$ однозначно представляется в виде

$$(m)_3 = \overline{d_1 d_2 d_3 \dots d_k}, \quad (*)$$

где числа d_i могут принимать любое из трех значений 0, 1 или 2. (Если троичная запись числа m имеет менее k цифр, то мы дополняем эту запись нулями слева.) Скажем,

$$(0)_3 = \underbrace{00 \dots 0}_k; \quad \left(\frac{3^k - 1}{2}\right)_3 = \underbrace{11 \dots 1}_k; \quad (3^k - 1)_3 = \underbrace{22 \dots 2}_k.$$

Среди этих чисел, по комбинаторной лемме (см. стр. 35), имеется 2^k таких, у которых в представлении (*) участвуют только 0 и 1. Покажем, что они удовлетворяют условиям задачи. Сумма двух таких чисел, t и s , которую можно получить, суммируя в представлении (*) троичные знаки на каждом месте, не может записываться только нулями и двойками (так как t и s различны). В то же время, любое число вида $2u$, где u записывается нулями и единицами, имеет в представлении (*) только 0 или 2. Поэтому равенство $2u = t + s$ или $u = (t + s)/2$ невозможно, ч. т. д.

97. Заметим сначала, что сумма цифр числа $n + 1$ возрастает по сравнению с суммой цифр числа n на единицу, если последняя цифра числа n не равна 9, и уменьшается на $9s - 1$, если число n оканчивается s девятками. Рассмотрим два случая.

А. Среди чисел $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 78$ не встречается число, оканчивающееся двумя (или более) нулями. Пусть число n имеет десятичное разложение

$$n = \overline{a_1 a_2 \dots a_{s-1} a_s} a_{s+1}.$$

Числа $n + 1, n + 2, \dots, n + 78$ могут отличаться от n только двумя последними десятичными знаками. Пусть $a_{s-1} + a_s = k$. Покажите сами, что сумма последних двух цифр в любой серии из 49 подряд идущих двузначных чисел (начинающейся с $\overline{a_{s-1} a_s}$) принимает все значения от l до $l + 12$, где $l \leq k$. Поэтому среди чисел $n, n + 1, \dots, n + 48$, в случае А обязательно найдется число, сумма цифр

которого делится на 13. Эта оценка окончательна, что доказывает пример последовательности 1, 2, ..., 48, 49.

Б. Пусть среди чисел $n, n+1, \dots, n+78$ встречается число, оканчивающееся двумя нулями. Обозначим это число n_0 , а сумму его цифр — через k_0 . Сумму цифр числа $n_0 - 1$ обозначим через s_0 . Очевидно, можно рассматривать лишь тот случай, когда ни k_0 , ни s_0 на 13 не делятся. Проверьте сами, что среди чисел $n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + 39$ обязательно найдется число, сумма цифр которого делится на 13 (это связано с тем, что суммы цифр чисел $n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + 39$ принимают все значения от k_0 до $k_0 + 12$). Совершенно аналогично показывается, что среди чисел

$$n_0 - 1, \dots, n_0 - 39$$

обязательно найдется число, сумма цифр которого делится на 13 (так как суммы цифр чисел от $n_0 - 1$ до $n_0 - 39$ меняются от s_0 до $s_0 - 12$).

Если даны 79 подряд расположенных чисел, причем среди них есть число с двумя нулями на конце, то либо левее, либо правее него будет 39 чисел подряд. Как было отмечено, среди этих чисел обязательно найдется такое, сумма цифр которого делится на 13.

Утверждение задачи, таким образом, полностью доказано. Приведем пример, который показывает, что в условии задачи число 79 нельзя уменьшить. Рассмотрим следующие 78 чисел:

$$\underbrace{99 \dots 961}_{8}; \dots; \underbrace{99 \dots 9}_{10}; \underbrace{10 \dots 0}_{10}; \dots; \underbrace{100 \dots 038}_{8}.$$

Проверьте сами, что среди этих чисел нет такого, сумма цифр которого делится на 13.

98. Нетрудно доказать, что числа $81, 81 \cdot 2, \dots, 81 \cdot 100$ дают при делении на 100 различные остатки. Так как таких остатков (включая 0) ровно 100, то среди них каждое из 100 чисел $0, 1, 2, \dots, 99$ встречается один раз.

Отсюда вытекает, что красными являются те и только те числа, которые можно получить прибавлением к одному из 100 чисел $81, 81 \cdot 2, \dots, 81 \cdot 100$ натурального числа, делящегося на 100. Значит, наибольшее синее число $81 \times 100 = 8100$, а наименьшее красное 181.

Докажем, что точка числовой прямой, отвечающая числу

$$x_0 = \frac{181 + 8100}{9} = 4140 \frac{1}{2},$$

удовлетворяет условиям задачи. Действительно, все красные числа записываются в виде $181 + 81m + 100n$ (m и n — целые неотрицательные числа). Докажем, что симметричные им относительно x_0 числа $8100 - 81m - 100n$ — синие. Если бы одно из них, r , было красным, то и число $8100 = r + 81m + 100n$ тоже было бы красным, а не синим. Все доказано.

99. Докажем по индукции следующее утверждение: число 2^n (где $n \leq 10$) написано ровно на 2^{n-1} карточках. При $n = 1$ утверждение тривиально. Рассмотрим число 2^n . Его делители написаны на 2^n карточках. Но делители числа 2^n — это оно само и делители числа 2^{n-1} . Делители числа 2^{n-1} написаны, по условию задачи, на 2^{n-1} карточках. Значит, число 2^n написано на $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ карточках. Утверждение доказано. В частности, при $n = 10$ число 1024 написано на 512 карточках.

100. Допустим, что система карточек, о которой говорится в условии задачи, существует (в дальнейшем это будет доказано). Обозначим через $g(n)$ число карточек, на которых написано число n . Задача состоит в доказательстве того, что $g(n) > 0$ для любого натурального $n \leq 1968$. Можно последовательно вычислять значения $g(n)$. Прежде всего, $g(1) = 1$. Затем $g(2) = 1$, $g(3) = 2$ и т. д. Рассмотрим натуральное число $n \leq 1968$, имеющее делители $s_1 = n, s_2, s_3, \dots, s_l = 1$. Число s_i написано на $g(s_i)$ карточках, а все числа $s_1 = n, s_2, s_3, \dots, s_l$ написаны на n карточках. Поэтому

$$g(n) + g(s_2) + g(s_3) + \dots + g(s_l) = n. \quad (*)$$

По этой формуле значение $g(n)$ при любом $n \leq 1968$ вычисляется через значения $g(s)$ при $s < n$.

Обозначим через $\varphi(n)$ число несократимых дробей вида k/n при $k \leq n$. Докажем, что каково бы ни было натуральное $n \leq 1968$,

$$g(n) = \varphi(n).$$

Так как при любом $n \geq 2$ дробь $(n-1)/n$ несократима и, значит, $\varphi(n) > 0$, то, доказав соотношение $g(n) = \varphi(n)$, мы решим задачу.

Для доказательства рассмотрим дроби

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$$

при $n \leq 1968$. Сократим каждую дробь на наибольший общий делитель ее числителя и знаменателя. В результате получатся дроби, знаменателями которых являются делители числа n — числа $s_1 = n, s_2, s_3, \dots, s_l = 1$. Легко видеть, что при этом получится $\varphi(s_i)$ дробей со знаменателем s_i . Так как всего дробей n , то

$$\varphi(n) + \varphi(s_2) + \varphi(s_3) + \dots + \varphi(s_l) = n. \quad (**)$$

Сравнивая формулы (*) и (**), видим, что значения $\varphi(n)$ при любом натуральном $n \leq 1968$ выражаются через значения $\varphi(s)$ при $s < n$ так же, как значения $g(n)$ выражаются через $g(s)$. Кроме того, $g(1) = \varphi(1)$. Отсюда следует, что $g(n) = \varphi(n)$. Все доказано.

101. Справедливость доказываемой формулы вытекает из следующих замечаний:

а) Если $n = p^k$, то $\varphi(n) = (p - 1)p^{k-1}$. Это утверждение легко доказывается по индукции (см. задачу 99, где разбирается случай $p = 2$).

б) Если числа n и m взаимно просты, то $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$. Чтобы доказать это, рассмотрим выражение $\psi(n) = n - \varphi(n)$. Очевидно, что $\psi(n)$ — число сократимых дробей вида k/n , при $k \leq n$. Соотношение $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ эквивалентно соотношению

$$n\psi(m) + m\psi(n) - \psi(m)\psi(n) = \psi(mn),$$

где m и n несократимы. Но $\psi(mn)$ равно числу сократимых дробей со знаменателем mn . Подсчитаем число таких дробей. Число дробей, числитель которых сократим с m , как легко показать, равно $\psi(m)n$. Аналогично, имеется $\psi(n)m$ дробей, числитель которых сократим с n . Но мы два раза учли дроби, числитель которых имеет общие делители как с m , так и с n . Таких дробей имеется $\psi(m)\psi(n)$. (Докажите это сами. В доказательстве используется комбинаторная лемма (см. стр. 35) и взаимная простота n и m .) Итого получается $n\psi(m) + m\psi(n) - \psi(m)\psi(n)$ сократимых дробей вида $k/(mn)$, где $k \leq mn$, т. е.

$$\psi(mn) = n\psi(m) + m\psi(n) - \psi(m)\psi(n).$$

102. Обозначим числа, стоящие в вершинах треугольника после n -й операции, через a_n, b_n и c_n . Согласно условию, $a_0 + b_0 + c_0 = 3000$ и так как числа a_0, b_0, c_0 неотрицательны, то каждое из них не превосходит 3000. Сумма

$a_n + b_n + c_n$ не меняется от операции к операции; в самом деле,

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} &= \frac{b_n + c_n}{2} + \frac{a_n + c_n}{2} + \frac{a_n + b_n}{2} = \\ &= a_n + b_n + c_n. \end{aligned}$$

Поэтому, каково бы ни было n ,

$$a_n + b_n + c_n = 3000.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 1000 &= \frac{b_n + c_n}{2} - 1000 = \\ &= \frac{3000 - a_n}{2} - 1000 = -\frac{1}{2}(a_n - 1000). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$b_{n+1} - 1000 = -\frac{1}{2}(b_n - 1000)$$

и

$$c_{n+1} - 1000 = -\frac{1}{2}(c_n - 1000).$$

Отсюда следует, что

$$a_{10} - 1000 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}(a_0 - 1000) < \frac{2000}{2^{10}} < 2,$$

т. е. $a_{10} < 1002$. Точно так же доказывается, что $b_n < 1002$ и $c_n < 1002$.

103. Обозначим через M наибольшее, а через m — наименьшее среди чисел $x_1, x_2, \dots, x_{1967}$. Очевидно, что $M \geq 0$, $m \leq 0$, так как $x_1 = x_{1967} = 0$. Докажем, что $m = 0$ и что все числа $x_2, x_3, \dots, x_{1966}$ положительны (и, значит, $M > 0$). Если это не так, то найдется число $x_i = m$ при $1 < i < 1967$. Тогда

$$m = \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{4} + 1.$$

Но $x_{i+1} \geq m$ и $x_{i-1} \geq m$, поэтому

$$m \geq \frac{2m}{4} + 1,$$

откуда $m \geq 2$. Но это противоречит тому, что $m \leq 0$.

Пусть $x_i = M > 0$. Тогда

$$M = \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{4} + 1 \leq \frac{2M}{4} + 1$$

и поэтому $M \leq 2$.

Более точные рассуждения позволяют доказать, что $M < 2$. В самом деле, пусть x_j — первое из чисел $x_1, x_2, \dots, x_{1966}$, равное M . Так как $x_1 = 0$, то $j > 1$. Но тогда $x_{j-1} < M$, и поэтому

$$M = \frac{x_{j+1} + x_{j-1}}{4} + 1 < \frac{2M}{4} + 1,$$

т. е. $M < 2$. Итак, мы установили, что $m = 0$, $M < 2$ и тем самым доказано утверждение а) задачи.

Перейдем к пункту б). Докажем, что набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_{1967}$ определен однозначно. В самом деле, пусть существует другой такой набор $y_1, y_2, \dots, y_{1967}$, т. е.

$$y_i = y_{1967} = 0, \quad y_i = \frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{4} + 1$$

при $i = 2, 3, \dots, 1966$. Пусть $z_i = x_i - y_i$, $i = 1, 2, \dots, 1967$. Легко видеть, что

$$z_1 = z_{1967} = 0, \quad z_i = \frac{z_{i+1} + z_{i-1}}{4}$$

при $1 < i < 1967$. Обозначив через M_1 и m_1 наибольшее и наименьшее среди чисел $z_1, z_2, \dots, z_{1967}$ соответственно, и рассуждая так же, как и раньше (см. пункт а)), легко показать, что $M_1 \leq 0$, $m_1 \geq 0$, откуда

$$z_1 = z_2 = \dots = z_{1967} = 0.$$

Но это и означает, что

$$x_1 = y_1; \quad x_2 = y_2; \quad \dots; \quad x_{1967} = y_{1967}.$$

Для доказательства утверждения б) теперь остается заметить, что наряду с набором $x_1, x_2, \dots, x_{1967}$ условиям задачи удовлетворяет и набор

$$y_1 = x_{1967}, y_2 = x_{1966}, y_3 = x_{1965}, \dots, y_{1966} = x_2, y_{1967} = x_1.$$

Утверждение в) проще всего доказать геометрически. Начертим ломаную линию, соединяя отрезками точки $A_1, A_2, \dots, A_{1967}$ с координатами

$$(1, x_1), (2, x_2), (3, x_3), \dots, (1966, x_{1966}), (1967, x_{1967})$$

(рис. 47). По доказанному ранее, эта ломаная лежит выше оси x и симметрична относительно вертикальной прямой, проходящей через точку $x = 984$ — середину отрезка

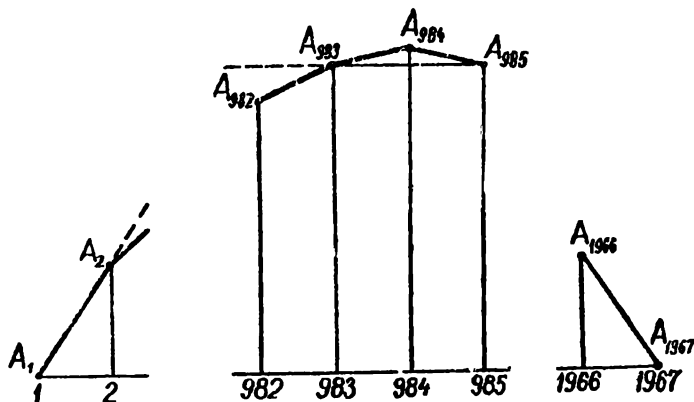


Рис. 47.

(1, 1967). Докажем, что полученная ломаная строго выпукла. В самом деле, при $1 < i < 1967$

$$x_i - \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2} = 1 - \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{4} > 1 - \frac{4}{4} = 0,$$

т. е. $x_i > \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2}$ (при этом использовалось уравнение $x_i = \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{4} + 1$ и утверждение а)).

Теперь ясно, что $x_{983} < x_{984}$ (так как точка A_{984} лежит выше хорды $A_{983}A_{985}$). Из того, что точка A_{982} лежит ниже (продолженной) хорды $A_{984}A_{983}$, следует, что $x_{992} < x_{983}$. Так же доказывается, что

$$x_{982} > x_{981} > x_{980} > \dots > x_2 > x_1.$$

104. Если два числа имеют одинаковую четность, то их разность — число четное; если одно из чисел четное, а другое — нечетное, то их разность — число нечетное. Значит, после каждой операции количество нечетных чисел сохраняется или уменьшается на два.

В начале на доске написаны 983 нечетных числа, после каждой операции остается нечетное число нечетных чисел, поэтому в конце на доске останется одно нечетное число.

105. Условимся писать вместо знака «+» число +1, а вместо знака «—» — число —1. При этом наша операция не будет, очевидно, менять произведения всех выписанных на доске чисел, так что последнее оставшееся число, независимо от того, в каком порядке мы стирали числа, будет равно произведению всех имеющихся в начале чисел.

106. Обозначим окружность, квадрат и треугольник буквами O, K, T . Операцию замены двух фигур третьей будем обозначать кружочками. Условие задачи теперь можно записать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} O \circ O &= O, & O \circ K &= K \circ O = K, \\ K \circ K &= T, & O \circ T &= T \circ O = T, \\ T \circ T &= K, & T \circ K &= K \circ T = O. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из этой таблицы видно, что операция \circ коммутативна. Нетрудно показать, что она ассоциативна, т. е. для любых фигур A, B и C (каждая из этих букв может означать либо K , либо O , либо T) выполняется соотношение

$$(A \circ (B \circ C)) = ((A \circ B) \circ C). \quad (2)$$

Проверку этого факта мы предоставляем читателю. Если даны n фигур, среди которых n_1 окружностей, n_2 треугольников и n_3 квадратов, то при любом способе действий мы получим в конце фигуру

$$\underbrace{(O \circ \dots \circ O)}_{n_1} \circ \underbrace{(T \circ \dots \circ T)}_{n_2} \circ \underbrace{(K \circ \dots \circ K)}_{n_3}.$$

При $n = 3$ это следует из формул (1) и (2). Индуктивный переход от n к $n + 1$ не составляет труда.

107. Условимся для краткости писать в дальнейшем A^n вместо $\underbrace{AA \dots A}_{n \text{ раз}}$, U^m вместо $\underbrace{UU \dots U}_{m \text{ раз}}$ и B^k вместо $\underbrace{BB \dots B}_{k \text{ раз}}$.

Кроме того, будем соединять знаком равенства слова, имеющие одинаковое значение. Приняв эти обозначения, можно переписать условия задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned} U^3 B &= B U, & A^2 B &= B A, & U^4 A &= A U, \\ A^7 &= E, & U^7 &= E, & B^7 &= E. \end{aligned}$$

Докажем сначала следующую лемму.

Л е м м а. Любое слово вида $A^n U^m$ эквивалентно слову $U^{m_1} A^{n_1}$ при некоторых n_1 и m_1 .

(Можно, конечно, выразить явно n_1 и m_1 через n и m , однако для решения задачи это не существенно.)

Доказательство проведем индукцией по n .

Пусть $n = 1$; тогда

$$\begin{aligned} A Y^m &= A Y \cdot Y^{m-1} = Y^4 A \cdot Y^{m-1} = Y^4 \cdot A \cdot Y \cdot Y^{m-2} = \\ &= Y^8 \cdot A \cdot Y^{m-2} = \dots = Y^{4s} A Y^{m-s} = Y^{4s} A Y \cdot Y^{m-s-1} = \\ &= Y^{4(s+1)} A Y^{m-(s+1)} = \dots = Y^{4m} A, \end{aligned}$$

и утверждение леммы доказано при $n = 1$. Пусть лемма справедлива при $n = k$. Если $n = k + 1$, то

$$A^{k+1} Y^m = A^k A Y^m = A^k Y^{4m} A.$$

Но, по предположению индукции, слово $A^k Y^{4m}$ можно представить в виде $Y^{m_1} A^{k_1}$ при некоторых m_1 и k_1 . Тогда

$$A^{k+1} Y^m = Y^{m_1} A^{k_1+1},$$

что и завершает доказательство леммы.

Точно так же можно доказать, что слово $B^l A^s$ эквивалентно слову $A^{s_1} B^{l_1}$, а слово $B^l U^v$ эквивалентно слову $U^{v_1} B^{l_1}$ при некоторых s_1, l_1 (зависящих, конечно, от l и s) и v_1, t_1 (зависящих от v и t).

Опираясь на только что доказанные утверждения, можно показать, что любое слово в языке племени «мумбо-юмбо» можно представить в виде $Y^n A^m B^k$. В самом деле, любое слово можно записать, конечно, так:

$$Y^{n_1} A^{m_1} B^{k_1} Y^{n_2} A^{m_2} B^{k_2} \dots Y^{n_r} A^{m_r} B^{k_r}$$

(некоторые из чисел $n_1, m_1, k_1, n_2, m_2, k_2, \dots$ могут равняться 0; в этом случае мы считаем, что $A^0 = E$, $Y^0 = E$, $B^0 = E$ и соответствующие символы можно либо заменить на E либо вообще опустить).

«Блоки», составленные из звуков BI , можно, переставляя с блоками, составленными из A и Y , собрать в конце слова и слово преобразуется к виду

$$Y^{\tilde{n}_1} A^{\tilde{m}_1} Y^{\tilde{n}_2} A^{\tilde{m}_2} \dots Y^{\tilde{n}_r} A^{\tilde{m}_r} B^{\tilde{k}}.$$

(Числа $\tilde{n}_1, \tilde{m}_1, \tilde{n}_2, \tilde{m}_2, \dots, \tilde{n}_r, \tilde{m}_r$ уже, разумеется, не обязаны совпадать с числами $n_1, m_1, n_2, m_2, \dots$, в большинстве случаев также $k \neq k_1 + k_2 + \dots + k_r$, потому, что при перестановке блоков количество звуков в блоках меняется.)

Переставляя теперь блоки из A и Y , можно собрать звуки Y в начале слова и слово будет иметь вид $Y^N A^M B^K$.

Воспользуемся теперь условиями $A^7 = E$, $U^7 = E$, $B^7 = E$. Если слово имеет вид $U^{N_1} A^{M_1} B^{K_1}$ и N_1, M_1, K_1 — остатки от деления N, M и K на 7, то это слово равнозначно слову $U^{N_1} A^{M_1} B^{K_1}$.

Итак, доказано, что любое сочетание звуков в языке племени «мумбо-юмбо» эквивалентно слову вида $U^{N_1} A^{M_1} B^{K_1}$, где $0 \leq N_1 \leq 6$, $0 \leq M_1 \leq 6$ и $0 \leq K_1 \leq 6$. По комбинаторной лемме (см. стр. 35) таких слов имеется $7^3 = 343$. Таким образом, имеется не более 343 различных имен, и значит, некоторые туземцы имеют одинаковые имена.

108. Проведем доказательство от противного. Пусть число $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ — рационально, т. е.

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = \frac{p}{q}$$

(p и q — целые). Тогда

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = \frac{p}{q} - \sqrt{3}.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$5 + 2\sqrt{10} + 2 = \frac{p^2}{q^2} + 3 - \frac{2p}{q}\sqrt{3},$$

т. е.

$$\sqrt{10} + \frac{p}{q}\sqrt{3} = \frac{p^2}{2q^2} - 2 = \frac{p_1}{q_1}.$$

Снова возводя в квадрат, получим

$$10 + \frac{3p^2}{q^2} + \frac{2p}{q}\sqrt{30} = \frac{p_1^2}{q_1^2};$$

откуда

$$\sqrt{30} = \frac{q}{2p} \left(\frac{p_1^2}{q_1^2} - \frac{3p^2}{q^2} - 10 \right),$$

т. е. $\sqrt{30}$ — рациональное число. Но это не так: число $\sqrt{30}$ иррационально (см. решение задачи 55).

Полученное противоречие и доказывает иррациональность числа $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

109. Предположим, что в десятичной записи числа $\sqrt{2}$, начиная с n -го места ($n \leq 4999999$) подряд 5000001 раз повторяется одна и та же цифра a . Тогда

$$\sqrt{2} = \frac{N_1}{10^{n-1}} + \frac{a}{10^n} + \dots + \frac{a}{10^{n+5000000}} + \frac{r}{10^{n+5000000}},$$

где N_1 — целое число, а $r < 1$. Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{N_1}{10^{n-1}} + \frac{a}{10^n} \left[1 + \dots + \frac{1}{10^{5000000}} \right] + \frac{r}{10^{n+5000000}} = \\ &= \frac{N_1}{10^{n-1}} + \frac{a}{10^n} \left[\frac{1 - \frac{1}{10^{5000001}}}{1 - \frac{1}{10}} \right] + \frac{r}{10^{n+5000000}} = \\ &= \frac{N_1}{10^{n-1}} + \frac{a}{9 \cdot 10^{n-1}} - \frac{a}{9 \cdot 10^{n+5000000}} + \frac{r}{10^{n+5000000}} = \frac{p}{9 \cdot 10^{n-1}} + R. \end{aligned}$$

Здесь p — целое число, остаток R удовлетворяет неравенству

$$|R| \leq \frac{1}{10^{n+5000000}}.$$

Возведем обе части равенства $\sqrt{2} = \frac{p}{9 \cdot 10^{n-1}} + R$ в квадрат. Получается

$$2 = \frac{p^2}{81 \cdot 10^{2n-2}} + \frac{2pR}{9 \cdot 10^{n-1}} + R^2.$$

Отсюда

$$\left| \frac{2 \cdot 81 \cdot 10^{2n-2} - p^2}{81 \cdot 10^{2n-2}} \right| \leq \left(\frac{2p}{9 \cdot 10^{n-1}} + |R| \right) \cdot |R|.$$

Но числитель левой части ни при каком p не может обратиться в 0 (так как это противоречило бы иррациональности $\sqrt{2}$). Поэтому

$$|R| \geq \frac{\frac{1}{81 \cdot 10^{2n-2}}}{\frac{2p}{9 \cdot 10^{n-1}} + |R|} \geq \frac{1}{9 \cdot 10^{n-1} (2p + 1)}$$

(мы учли, что $R \cdot 9 \cdot 10^{n-1} < 1$). Поскольку $p < 1,42 \cdot 9 \cdot 10^{n-1}$, то окончательно имеем

$$\begin{aligned} |R| &> \frac{1}{9 \cdot 10^{n-1} (2,84 \cdot 9 \cdot 10^{n-1} + 1)} > \frac{1}{3 \cdot 81 \cdot 10^{2n-2}} > \\ &> \frac{1000}{3 \cdot 81 \cdot 10^{n+5000000}} > \frac{4}{10^{n+5000000}}. \end{aligned}$$

Но это противоречит полученной ранее оценке

$$|R| < \frac{1}{10^{n+5000000}}.$$

По существу, решение задачи основывалось на том, что иррациональное число $\sqrt{2}$ нельзя «слишком хорошо» приблизить рациональными числами. Если внимательно проанализировать вторую часть нашего доказательства, то легко понять, что справедливо такое утверждение:

Для любого рационального числа p/q ($q > 100$)

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{3q^2}.$$

Это весьма частный случай знаменитой теоремы Лиувилля, утверждающей, что любое алгебраическое число, т. е. число, являющееся корнем уравнения с целыми коэффициентами, нельзя «слишком хорошо» приблизить рациональными числами. Число $\sqrt{2}$ (так же как $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{17}$, $\sqrt[11]{5}$ и т. д.) является алгебраическим (это корень уравнения $x^2 - 2 = 0$).

110. Представим $(6 + \sqrt{37})^{999}$ в виде

$$(6 + \sqrt{37})^{999} + (6 - \sqrt{37})^{999} + (\sqrt{37} - 6)^{999}.$$

Первые два члена дают в сумме целое число. Это можно доказать либо раскрывая скобки по формуле бинома Ньютона либо по индукции. Приведем доказательство по индукции несколько более общего факта.

Л е м м а. *Числа*

$$[(6 + \sqrt{37})^{2n-1} + (6 - \sqrt{37})^{2n-1}]$$

и

$$\sqrt{37} [(6 + \sqrt{37})^{2n-1} - (6 - \sqrt{37})^{2n-1}]$$

при любом натуральном n — целые.

При $n = 1$ это очевидно. Пусть лемма выполняется при $n = k$. Тогда при $n = k + 1$ получается

$$\begin{aligned} & (6 + \sqrt{37})^{2k+1} + (6 - \sqrt{37})^{2k+1} = \\ & = (6 + \sqrt{37})^2 (6 + \sqrt{37})^{2k-1} + (6 - \sqrt{37})^2 (6 - \sqrt{37})^{2k-1} = \\ & = 73 [(6 + \sqrt{37})^{2k-1} + (6 - \sqrt{37})^{2k-1}] + \\ & \quad + 12 \sqrt{37} [(6 + \sqrt{37})^{2k-1} - (6 - \sqrt{37})^{2k-1}]. \end{aligned}$$

Из предположения индукции следует, что это число целое. Аналогично,

$$\begin{aligned} & \sqrt{37} [(6 + \sqrt{37})^{2k+1} - (6 - \sqrt{37})^{2k+1}] = \\ & = \sqrt{37} \{73 [(6 + \sqrt{37})^{2k-1} - (6 - \sqrt{37})^{2k-1}] + \\ & \quad + 12 \sqrt{37} [(6 + \sqrt{37})^{2k-1} + (6 - \sqrt{37})^{2k-1}]\} \end{aligned}$$

— также целое число. Лемма доказана.

В силу леммы все знаки после запятой числа $(6 + \sqrt{37})^{999}$ совпадают с соответствующими знаками числа $(\sqrt{37} - 6)^{999}$. Далее, используя очевидное неравенство

$$\sqrt{1 + \alpha} < 1 + \frac{\alpha}{2},$$

получим

$$\begin{aligned} \sqrt{37} - 6 &= 6 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{36}} - 1 \right) < 6 \left(1 + \frac{1}{72} - 1 \right) < \\ &< \frac{6}{72} < \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(\sqrt{37} - 6)^{999} < \frac{1}{10^{999}},$$

откуда и следует утверждение задачи.

111. При решении этой задачи нам потребуются некоторые простые свойства пределов. Эти свойства можно либо принять без доказательства (интуитивно они очевидны), либо прочесть доказательства, скажем, в книгах «Энциклопедия элементарной математики», т. 3 или «Детская энциклопедия», т. 3.

а) Если $a_n \leq b_n \leq c_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

Будем писать, что $b_n \sim c_n$ (b_n и c_n эквивалентны), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = 1.$$

Тогда

б) Если $b_n \sim c_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = A$.

Посчитаем, сколько цифр встречается в записи всех натуральных чисел от 1 до n и сколько среди этих цифр семерок. Пусть $k = [\lg n]$. Тогда $10^k \leq n < 10^{k+1}$. Числа от 1 до 9 — однозначные, от 10 до 99 — двузначные, ..., от 10^{k-1} до $10^k - 1$ они k -значные, от 10^k до n они $(k+1)$ -значные. Общее количество цифр $M(n)$ во всех числах от 1 до n поэтому дается формулой

$$M(n) = 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + \dots + k \cdot 9 \cdot 10^{k-1} + (k+1)(n - 10^k).$$

Л е м м а. $M(n) \sim n \lg n$.

В самом деле, опираясь на формулу для суммы геометрической прогрессии, имеем

$$\begin{aligned} 9 + 2 \cdot 90 + \dots + 9 \cdot k \cdot 10^{k-1} &= \\ &= 9 \cdot [1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + \dots + k \cdot 10^{k-1}] = \\ &= 9 [(1 + 10 + \dots + 10^{k-1}) + (10 + \dots + 10^{k-1}) + \dots \\ &\quad \dots + (10^{k-2} + 10^{k-1}) + 10^{k-1}] = \\ &= 9 \left[\left(\frac{10^k - 1}{9} \right) + 10 \left(\frac{10^{k-1} - 1}{9} \right) + \dots + 10^{k-2} \left(\frac{10^2 - 1}{9} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 10^{k-1} \left(\frac{10 - 1}{9} \right) \right] = (10^k - 1) + (10^k - 10) + (10^k - 10^2) + \\ &+ \dots + (10^k - 10^{k-1}) + (10^k - 10^k) = 10^k(k+1) - \frac{10^{k+1} - 1}{9}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M(n) &= 10^k(k+1) - \frac{10^{k+1} - 1}{9} + n(k+1) - (k+1)10^k = \\ &= n(k+1) - \frac{10^{k+1} - 1}{9}. \end{aligned}$$

Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{k+1} - 1}{9n \lg n} = 0$ и, значит, $M(n) \sim n \lg n$. Лемма доказана.

В последовательности цифр, стоящих на предпоследнем месте, серия из 10 семерок повторяется с периодом 100, на третьем месте с конца серия из 100 семерок повторяется с периодом 1000 и т. д. Пусть $N_1(n), N_2(n), \dots, N_{k+1}(n)$ — число семерок, стоящих соответственно на последнем, предпоследнем и т. д. месте в натуральных числах от 1 до n . Легко видеть, в силу сказанного выше, что

$$\begin{aligned} \left[\frac{n}{10} \right] &\leq N_1(n) \leq \left[\frac{n}{10} \right] + 1; \\ 10 \left[\frac{n}{100} \right] &\leq N_2(n) \leq 10 \left[\frac{n}{100} \right] + 10; \\ 10^2 \left[\frac{n}{1000} \right] &\leq N_3(n) \leq 10^2 \left[\frac{n}{1000} \right] + 10^2; \\ &\vdots \\ 10^{k-1} \left[\frac{n}{10^k} \right] &\leq N_k(n) \leq 10^{k-1} \left[\frac{n}{10^k} \right] + 10^{k-1}; \\ 10^k \left[\frac{n}{10^{k+1}} \right] &\leq N_{k+1}(n) \leq 10^k \left[\frac{n}{10^{k+1}} \right] + 10^k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{10} - 1 &\leq N_1(n) \leq \frac{n}{10} + 1; \\ \frac{n}{10} - 10 &\leq N_2(n) \leq \frac{n}{10} + 10; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{n}{10} - 10^{k-1} &\leq N_k(n) \leq \frac{n}{10} + 10^{k-1}; \\ \frac{n}{10} - 10^h &\leq N_{k+1}(n) \leq \frac{n}{10} + 10^k. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получим

$$\frac{n(k+1)}{10} - \frac{10^{k+1}-1}{9} < N(n) < \frac{n(k+1)}{10} + \frac{10^{k+1}-1}{9}.$$

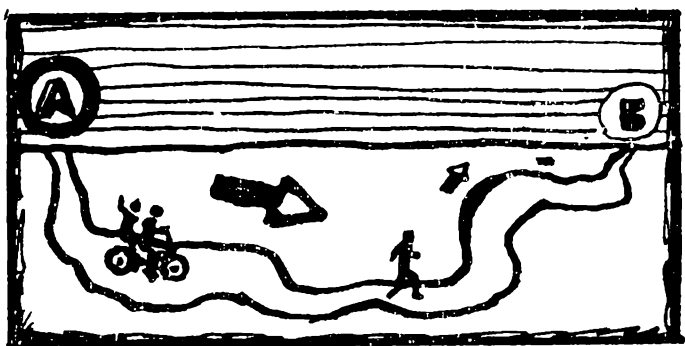
Но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n([\lg n] + 1)}{n \lg n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{[\lg n] + 1} - 1}{9 \lg n \cdot n} = 0$$

(последний предел был вычислен ранее). Так как, к тому же, по лемме $M(n) \sim n \lg n$, то в силу замечаний а) и б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{M(n)} = \frac{1}{10}.$$

Конечно, наши рассуждения годятся и для любой другой цифры и приводят к тому же ответу.



ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Назовем целое число удачным, если его можно представить в виде суммы двух квадратов или в виде отношения двух сумм квадратов. Доказать, что произведение удачных чисел — удачное число.

✓ 2. Доказать, что год, когда потерпел крушение капитан Грант (1862 *), не был удачным.

3. Найдите все числа вида \overline{abba} , являющиеся полными квадратами.

4. Найдите все двузначные числа, квадраты которых оканчиваются тремя одинаковыми цифрами, отличными от нуля.

5*. Даны целые числа a, b, c, d . Известно, что при всех натуральных x число $ax^3 + bx^2 + cx + d$ простое. Доказать, что

$$a = b = c = 0.$$

6*. Вдоль дороги расположено шесть домов на различных расстояниях друг от друга. Где надо вырыть колодец, чтобы среднее его расстояние от домов было минимально.

*) См. Жюль В е р н, Дети капитана Гранта, Москва, 1957 г. (Библиотека приключений), стр. 13.

7*. В вершинах правильного шестиугольника написаны целые числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 , причем $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0$. Переносом называется вычитание единицы из числа, стоящего в некоторой вершине, и прибавление ее к числу, стоящему у одной из соседних вершин. Какое минимальное число переносов надо сделать, чтобы все числа, стоящие у вершин шестиугольника, стали равны нулю?

8. Три пункта, A, B и C , соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной $\frac{1}{2}AB$; к отрезку дороги BC примыкает квадратное поле со стороной, равной BC , а к отрезку дороги AC примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной AC , и шириной 4 км. Площадь леса на 20 км² больше суммы площадей квадратных полей. Найти площадь леса.

9. Доказать, что для любых положительных a, b, c и d

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}.$$

10*. Доказать, что сумма

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}$$

уменьшается с возрастанием n (n — натуральное).

11. Какое наименьшее значение может иметь сумма всевозможных попарных произведений тысячи чисел, если известно, что все эти числа по абсолютной величине не превосходят единицы?

12. В выражении $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9$ расставить скобки так, чтобы после всех вычислений получилось а) наибольшее; б) наименьшее из всех возможных чисел.

13. Три человека должны попасть из города A в город B , отстоящий от A на расстоянии 130 км. В их распоряжении находится один двухместный мотоцикл. Скорость мотоцикла (с грузом или без груза) 50 км/час, скорость пешехода 5 км/час. Найдите наименьшее время, необходимое для того, чтобы все трое попали в город B .

14*. Найдите все действительные решения системы уравнений $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 1$.

15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{1}{x_2} \right), \\ x_2 = \frac{1}{2} \left(x_3 + \frac{1}{x_3} \right), \\ x_3 = \frac{1}{2} \left(x_4 + \frac{1}{x_4} \right), \\ x_4 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{1}{x_1} \right). \end{cases}$$

16*. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{x_1} = \cos \pi x_2, \\ 3\sqrt[3]{x_2} = \cos \pi x_3, \\ 3\sqrt[3]{x_3} = \cos \pi x_4, \\ 3\sqrt[3]{x_4} = \cos \pi x_1, \end{cases}$$

все углы выражены в радианной мере).

17. Известно, что

$$(\sqrt{2} - 1)^7 = \sqrt{57122} - \sqrt{57121}.$$

Доказать, что $(\sqrt{2} + 1)^7 = \sqrt{57122} + \sqrt{57121}$.

18. Доказать, что при $0 < a < 1$ уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = a$$

имеет единственное решение.

19*. Доказать, что $\frac{1}{2} [(\sqrt{2} + 1)^n - (\sqrt{2} - 1)^n]$ — целое число.

20*. Доказать, что при любом натуральном n число $(\sqrt{2} - 1)^n$ представляется в виде разности квадратных корней двух последовательных натуральных чисел.

21*. Доказать, что при любом целом $n \geq 2$ число $\cos \frac{\pi}{2^n}$ — иррациональное.

22*. Доказать, что $\operatorname{tg} 1^\circ$ — число иррациональное.

23. Доказать, что не существует рациональных чисел r_1 и r_2 таких, что $\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} = \sqrt[3]{2}$.

24*. Доказать, что функция $f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$ — непериодическая.

25*. Доказать, что функция $f(x)$ из предыдущей задачи ни при каком значении x не принимает значения 2, но может принимать значения, сколь угодно близкие к 2.

26. Функцией Дирихле называется функция $D(x)$, равная 1 в рациональных точках и 0 в иррациональных. Доказать, что $D(x)$ — функция периодическая, причем ее периодом является любое рациональное число, но никакое иррациональное число ее периодом не является.

27*. Доказать, что последовательность чисел

$$\log_2 3, \log_3 4, \dots, \log_n (n+1), \dots$$

убывает.

28*. Доказать неравенство

$$\log_{81} 576 < \log_{36} 192.$$

29. Доказать, что не существует 11-ти бесконечных десятичных дробей, каждые две из которых совпадают лишь в конечном числе разрядов.

30. Океанолог Костя метит китов красными и белыми гарпунами. (Метка определяется только количеством красных и количеством белых гарпунов.) Какое минимальное число гарпунов ему нужно, чтобы пометить разными метками 54 кита из большого стада?

31. Какое наибольшее число пашек можно расставить на черных полях доски 10×10 клеток так, чтобы ни одна из них не могла бить другие и хотя бы одно черное поле оставалось свободным?

32. Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него 3-мя красными и 7-ю синими шарфиками. Сколько существенно различных погремушек может быть выпущено?

33. У Змея Горыныча 2000 голов. Сказочный богатырь может срубить ему одним ударом меча 33, 21, 17 или 1 голову, но при этом у Змея вырастает взамен соответственно 48, 0, 14 или 349 голов. Если отрублены все головы, то

новых голов не вырастает. Сможет ли богатырь одолеть Змея?

34. Сумма пяти целых чисел равна 0. Доказать, что сумма пятых степеней этих чисел делится на 15.

35. Петя Иванов придумал признак делимости на 81: если сумма цифр числа делится на 81, то и само это число делится на 81. Верен ли этот признак делимости?

36. Кусок бумаги разрешается разорвать на 8 или 12 частей. Каждый из получившихся кусков снова можно разорвать на 8 или 12 частей, либо вообще не рвать и т. д. Удастся ли получить таким образом 60 кусков? Докажите, что можно получить любое число кусков, большее 60-ти.

Евгений
Борисович
Дынкин

Станислав
Алексеевич
Молчанов

Александр
Львович
Розенталь

Математические соревнования
Арифметика и алгебра
М., 1970, 96 стр. с илл.

| | |
|----------------|---------------------------------|
| Редактор | Н. П. Рябенская |
| Художник серии | В. Б. Янкилевский |
| Техн. редактор | К. Ф. Брудно |
| Корректоры | Е. А. Белицкая, И. Б. Румянцева |

| | |
|----------------|----------------|
| Сдано в набор | 2/VII 1969 г. |
| Подп. к печати | 23/XII 1969 г. |
| Бумага | 84 × 108/32 |
| Физ печ. л. | 3. |
| Усл. печ. л. | 5,04. |
| Уч.-изд. л. | 4,49. |
| Тираж | 200000 экз. |
| Т-15997. | |
| Цена книги | 15 коп. |
| Заказ № 2572 | |

Издательство «Наука»
Главная редакция
Физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография изд-ва «Наука»
Москва, Шубинский пер., 10

Математика

Библиотечка физико-математической школы

Серия основная

- Выпуск 1 И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. Метод координат.
- Выпуск 2 И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль. Функции и графики (основные приемы).
- Выпуск 3 С. И. Гельфанд, М. Л. Гервер, А. А. Кириллов, Н. Н. Константинов, А. Г. Кушниренко. Задачи по элементарной математике (последовательности, комбинаторика пределы).
- Выпуск 4 Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. Прямые и кривые.

Серия дополнительная

- Выпуск 1* Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго. Математические задачи.
- Выпуск 2* А. А. Кириллов. Пределы.
- Выпуск 3* Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь. Математические соревнования (Арифметика и алгебра).